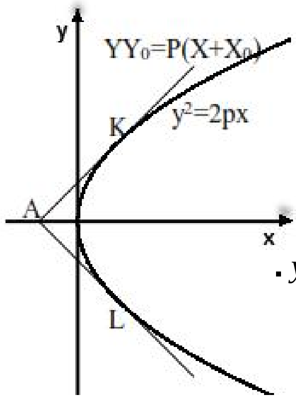
א. (1) נתונה פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$.



כיוון שהפרבולה סימטרית לציר ה- x ,

ושני המשיקים נפגשים בנקודה שעל ציר ה- x ,

הרי שבהכרח שיעורי ה- x של נקודות ההשקה שווים,

ושיעורי ה- y נגדיים.

נראה גם באמצעות חישוב (שממילא נדרש להמשך התרגיל).

משוואת המשיק לפרבולה, בנקודת ההשקה, היא $yy_0 = p(x+x_0)$.

אם נציב $y=0$, נקבל $x=-x_0$, ולכן $x_K = -x_A$ ו- $x_L = -x_A$,

ומכאן ש- $x_K = x_L$.

תשובה: הוכַח.

(2) נתון כי המשיקים נחתכים גם על מדריך הפרבולה, כלומר $x_A = -\frac{p}{2}$.

לכן, $x_K = x_L = \frac{p}{2}$. נציב במשוואת הפרבולה ונקבל $y^2 = 2p\cdot\frac{p}{2}$ ובהתאם $y = \pm p$.

מבלי להגביל את הכלליות, נסמן: $K(\frac{p}{2}, p)$, $L(\frac{p}{2}, -p)$.

שיפוע המשיק בנקודה $K(\frac{p}{2}, p)$ הוא: $\frac{p}{y_0} = \frac{p}{p} = 1$, ובנקודה $L(\frac{p}{2}, -p)$ הוא: $\frac{p}{y_0} = \frac{p}{-p} = -1$,

מכאן שמכפלת השיפועים היא -1 , והמשיקים מאונכים זה לזה.

תשובה: הוכַח.

ב. נציב $p=2$ ומשוואת הפרבולה היא $y^2 = 4x$, ושיעורי נקודות ההשקה: $K(1,2)$, $L(1,-2)$.

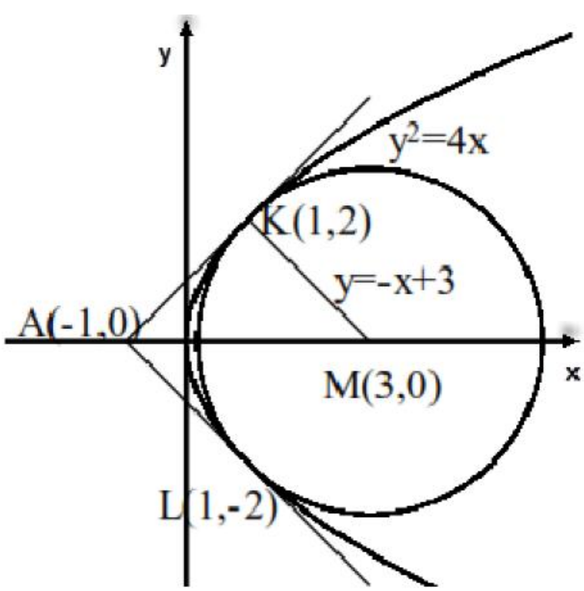
הרדיוס MK מאונך למשיק, ולכן שיפועו -1 ומשוואת הרדיוס היא $y-2 = -1(x-1) \rightarrow y = -x+3$,

החותך את ציר ה- x בנקודה $M(3,0)$.

אורך הרדיוס: $R = \sqrt{(1-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8}$

ומשוואת המעגל היא $(x-3)^2 + y^2 = 8$.

תשובה: משוואת המעגל היא $(x-3)^2 + y^2 = 8$.



ג. אורך AK **:** $\sqrt{(1-(-1))^2+(2-0)^2}=\sqrt{8}$ **וכמובן שגם אורך** AL **.**

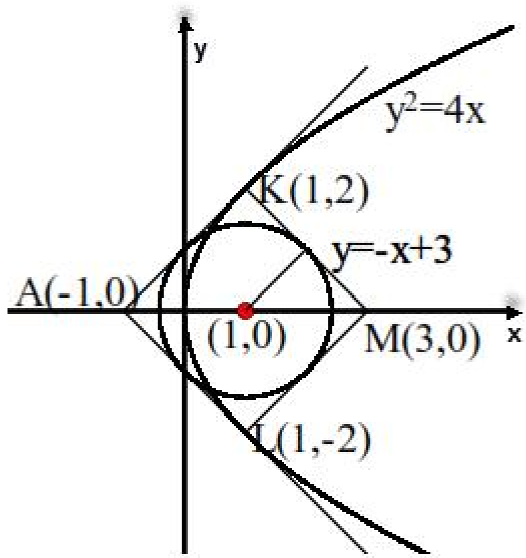
מכאן שהמרובע AKML **הוא ריבוע, ומרכז המעגל החסום הוא גם מפגש אלכסונים.**

אמצע האלכסון AM **הוא** $(1,0)$ **וזה מרכז המעגל החסום במרובע זה.**

אורך הרדיוס הוא מרחק המרכז, למשל, מהצלע KM **שמשוואתה** $y=-x+3$ **, או** $x+y-3=0$ **.**

$r=-\frac{1+0-3}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ **ומשוואת המעגל החסום היא** $(x-1)^2+y^2=2$ **.**

תשובה: משוואת המעגל החסום במרובע AKML **היא** $(x-1)^2+y^2=2$ **.**



א. נתון מעגל, הנמצא במישור ® , ומרכזו בראשית הצירים $O(0,0,0)$ **.**

הישר $l_1: \underline{x}=(2,2,0)+t(1,2,1)$ **נמצא במישור זה ומשיק למעגל בנקודה** B **,**

ולכן הרדיוס מאונך לנקודת ההשקה והמכפלה הסקלרית, של וקטורי הכיוון, שווה ל- 0 **.**

נסמן $B(2+t,2+2t,t)$ **נקודה טיפוסית על הישר,**

ומכיוון שהרדיוס מגיע מראשית הצירים, הרי שההצגה הפרמטרית של הרדיוס היא $\underline{x}=(2+t,2+2t,t)$ **.**

$$(2+t,2+2t,t)\cdot(1,2,1)=0$$
$$2+t+4+4t+t=0$$
$$t=-1$$

ובהתאם שיעורי הנקודה $B(1,0,-1)$ **.**

תשובה: $B(1,0,-1)$ **.**

ב. (1) נמצא את משוואת המישור ®, שההצגה הפרמטרית שלו היא : $\underline{x}=t(1,2,1)+r(1,0,-1)$ **,**

על פי וקטור הכיוון הנתון ווקטור הכיוון מ- $B(1,0,-1)$ **לראשית הצירים, שנמצאת על מישור זה.**

$$(a,b,c)\cdot(1,0,-1)=0 \quad \to a-c=0 \quad \to a=c=1$$
$$(a,b,c)\cdot(1,2,1)=0 \quad \to a+2b+c=0 \quad \to 1+2b+1=0 \quad \to b=-1$$

מכאן שמשוואת המישור ®, העובר בראשית הצירים, היא $®: x-y+z=0$ **.**

נקודה טיפוסית על הישר $l_2=\underline{x}=(0,1,1)+s(2,-1,1)$ **היא** $(2s,1-s,1+s)$ **.**

נציב במשוואת המישור ונקבל:

$$2s-(1-s)+1+s=0 \quad \to 2s-1+s+1+s=0 \quad \to s=0$$

ובהתאם שיעורי הנקודה $A(0,1,1)$ **, שהיא נקודת החיתוך של הישר** l_2 **עם המישור ®.**

נראה שמרחקה ממרכז המעגל, ראשית הצירים, שווה לרדיוס המעגל.

$$d_{BO}=\sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{2}$$
$$d_{AO}=\sqrt{(0-0)^2+(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$$

תשובה: $A(0,1,1)$ **נמצאת על המעגל .**

(2) משולש AOB **שווה שוקיים, כאשר אורכי השוקיים** $\sqrt{2}$ **.**

$$\cos\sphericalangle AOB=\frac{(1,0,-1)\cdot(0,1,1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1\cdot0+0\cdot1+(-1)\cdot1}{2}=-\frac{1}{2} \quad \to \sphericalangle AOB=120^\circ$$

$$S_{\Delta AOB}=\frac{OA\cdot OB\cdot\sin\sphericalangle AOB}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

תשובה: שטח המשולש AOB **הוא** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **יח"ר .**

(1) נתון המספר המרוכב $z=\frac{(\cos\frac{\circledR}{9}+i\sin\frac{\circledR}{9})^3}{(\cos\frac{\circledR}{12}-i\sin\frac{\circledR}{12})^2}$.

נשתמש בזהויות $\cos\sim=\cos(-\sim)$, $-\sin(\sim)=\sin(-\sim)$, ולאחר מכן בנוסחאות דה-מואבר.

$$z=\frac{(\cos\frac{\circledR}{9}+i\sin\frac{\circledR}{9})^3}{(\cos\frac{\circledR}{12}-i\sin\frac{\circledR}{12})^2}$$

$$z=\frac{(cis\frac{\circledR}{9})^3}{(\cos(-\frac{\circledR}{12})+i\sin(-\frac{\circledR}{12}))^2}$$

$$z=\frac{(cis\frac{\circledR}{9})^3}{(cis(-\frac{\circledR}{12}))^2}$$

$$z=\frac{cis\frac{\circledR}{3}}{cis(-\frac{\circledR}{6})}=cis(\frac{\circledR}{3}-(-\frac{\circledR}{6}))$$

$$\boxed{z=cis\frac{\circledR}{2}}$$

תשובה: $|z|=1$, $\arg(z)=\frac{\circledR}{2}$, או $\arg(z)=90°$.

(2) $z^n=(cis\frac{\circledR}{2})^n=cis(\frac{\circledR}{2}\cdot n)$

מספר מדומה טהור ממוקם על הציר המדומה במישור גאוס, ובמקרה זה עבור $\arg(z^n)=\frac{\circledR}{2}+\circledR k$.

מכאן ש- $\frac{\circledR}{2}\cdot n=\frac{\circledR}{2}+\circledR k \quad /:\frac{\circledR}{2}$

$n=1+2k$

תנאי זה יתקיים עבור n טבעי אי-זוגי, כשיש לשים לב ש- k חייב להיות טבעי או 0 .

דרך נוספת לפתור תת סעיף זה היא עפ"י המחזוריות של המספר i , כשהוא מועלה בחזקה זוגית/ אי-זוגית :

בתת סעיף 1 מתקבל $z=i$ בהצגה האלגברית, ואז עלינו לגלות, לאלו ערכי n $(i)^n$ הוא מספר מדומה טהור.

קל לראות, שכאשר- n טבעי זוגי , אז $(i)^n$ הוא מספר ממשי טהור, כלומר $z^n=\pm1$,

וכאשר n טבעי אי-זוגי , אז $(i)^n$ הוא מספר מדומה טהור, כלומר $z^n=\pm i$.

תשובה: עבור ערכי n טבעיים אי-זוגיים, נקבל ש- z^n הוא מספר מדומה טהור .

(1) נתון המקום הגיאומטרי $\left|(z+\bar{z})-m(z-\bar{z})\right|=40$ **, כאשר** $m>1$ **מספר ממשי.**

נזהה את המקום הגיאומטרי.

נסמן $z=x+yi$

$$\left|(x+yi+x-yi)-m(x+yi-(x-yi))\right|=40$$
$$\left|2x-2myi\right|=40$$
$$\sqrt{(2x)^2+(2my)^2}=40$$
$$4x^2+4m^2y^2=1600$$
$$\frac{x^2}{400}+\frac{m^2y^2}{400}=1$$

כיוון שנתון כי $m>1$ **ממשי, הרי ש-** $m^2>1$ **והמשוואה שהתקבלה היא של אליפסה (ולא של מעגל).**

כאשר: $a=20\,,\,b=\frac{20}{m}$ **.**

תשובה: המקום הגיאומטרי הוא אליפסה.

(2) נתון כי הנקודה $12+8i$**.**

נציב $(12,8)$ **במשוואת האליפסה.**

$$\frac{12^2}{400}+\frac{m^2\cdot 8^2}{400}=1$$
$$\frac{144}{400}+\frac{64m^2}{400}=1$$
$$144+64m^2=400$$
$$m^2=4$$
$$m=2 \quad \leftarrow m>1$$

משוואת האליפסה היא $\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{100}=1$ **, כאשר:** $a=20\,,\,b=10$ **.**

ובהתאם: שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים: $(20,0)\,,\,(-20,0)\,,\,(0,10)\,,\,(0,-10)$ **.**

תשובה: $(20,0)\,,\,(-20,0)\,,\,(0,10)\,,\,(0,-10)$**.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=9^x-2\cdot 3^x-3$, המוגדרת לכל x .

נעבוד עם התבנית הבאה: $f(x)=3^{2x}-2\cdot 3^x-3$, כי נוח לעבוד עם בסיסים זהים.

שתי הצבות במחשבון: $f(-5)=-3.008\to -3$, $f(5)=58,560\to +\infty$,

ומכאן ש $y=-3$ אסימפטוטה אופקית לשמאל, וגרף הפונקציה יתחיל בירידה ויסתיים בעלייה.

(1) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

ציר ה- y , $x=0$: $f(0)=3^{2\cdot 0}-2\cdot 3^0-3=-4\to(0,-4)$.

ציר ה- x , $y=0$:

$$0=3^{2x}-2\cdot 3^x-3$$

$$(3^x)_{1,2}=\frac{2\pm 4}{2}(3^x)_{1,2}=\frac{2\pm 4}{2}$$

$$3^x=3\quad\to x=1\quad\to(1,0)$$

$$3^x=-1\quad\to\varnothing\ (3^x>0)$$

תשובה: $(0,-4)$, $(1,0)$.

(2) כאמור, $y=-3$ אסימפטוטה אופקית לשמאל.

אפשר להבין זאת, גם מהעובדה ששני המחוברים הראשונים, בתבנית הפונקציה $f(x)=3^{2x}-2\cdot 3^x-3$,

שואפים לאפס, עבור איקסים ששואפים למינוס אינסוף, ולכן $f(x)\to 0-0-3=-3$.

תשובה: $y=-3$ אסימפטוטה אופקית לשמאל.

(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון.

$$f'(x)=2\cdot 3^{2x}\cdot\ell n3-2\cdot 3^x\cdot\ell n3$$

$$0=2\ell n3\cdot 3^x(3^x-1)$$

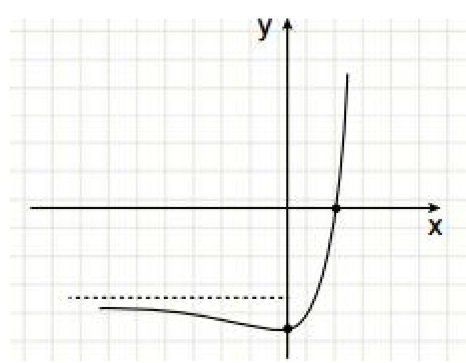
$$3^x=1\quad\to x=0\quad\to(0,-4)$$

על פי השתנות ערכי הפונקציה (y) לרבות שתי ההצבות , הנקודה $(1,0)$, והאסימפטוטה $y=-3$,

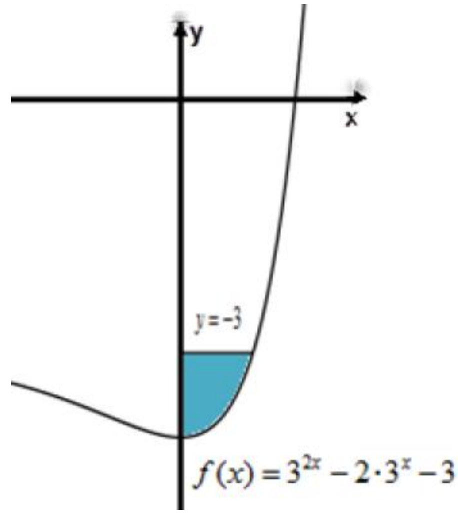
ניתן לקבוע ש- $(0,-4)$ מינימום.

תשובה: $(0,-4)$ מינימום.

(4) הסקיצה המתאימה



ב. נחשב את השטח המבוקש



נמצא את גבול השטח מימין:

$$3^{2x}-2\cdot3^{x}-3=-3$$
$$3^{x}(3^{x}-2)=0$$
$$3^{x}=2\quad\rightarrow x=\ell og_{3}2$$

$$S=\int_{0}^{\ell og_3 2}(-3-(3^{2x}-2\cdot3^{x}-3))\,dx$$
$$S=\int_{0}^{\ell og_3 2}(-3^{2x}+2\cdot3^{x})\,dx$$
$$S=\frac{-3^{2x}}{2\ell n3}+\frac{2\cdot3^{x}}{\ell n3}\Big]_{0}^{\ell og_3 2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=\ell og_3 2: & \frac{-3^{2\cdot\ell og_3 2}}{2\ell n3}+\frac{2\cdot3^{\ell og_3 2}}{\ell n3}=\frac{-4}{2\ell n3}+\frac{2\cdot2}{\ell n3}=\frac{2}{\ell n3} \\ x=0: & \frac{-3^{2\cdot0}}{2\ell n3}+\frac{2\cdot3^{0}}{\ell n3}=\frac{-1}{2\ell n3}+\frac{2}{\ell n3}=\frac{3}{2\ell n3}\end{array}\right\} S=\frac{2}{\ell n3}-\frac{3}{2\ell n3}=\frac{1}{2\ell n3}\approx0.455$$

תשובה: גודל השטח הוא $\frac{1}{2\ell n3}\approx0.455$ **יח"ר.**

ג. נתונה הפונקציה , $g(x)=f(x)+4$, **תזוזה של ארבע יחידות כלפי מעלה של הפונקציה המקורית.**

גודל השטח שמצאנו בסעיף ב', שווה לשטח מימין לציר ה- y **(כמו בשטח הנתון),**

המוגבל על ידי $g(x)=f(x)+4$ **והישר** $y=k$ **.**

מכאן שהישר $y=k$ **הוא תזוזה אנכית כלפי מעלה בארבע יחידות של האסימפטוטה** $y=-3$ **,**

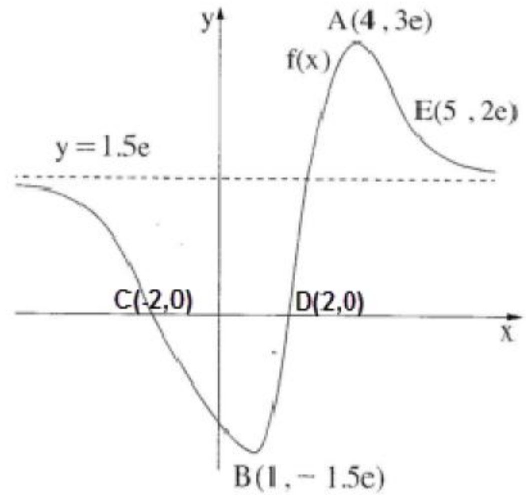
ומכאן ש- $k=-3+4=1$ **(כאשר** $y=1$ **הוא האסימפטוטה האופקית, לשמאל, של** $g(x)=f(x)+4$ **).**

תשובה: $k=1$ **.**

5

בגרות עו יולי 16 מועד קיץ ב שאלון 35807/35582

א. נתונה הפונקציה $f(x)$ ומספר נקודות שעל הגרף שלה, כמתואר בגרף הבא.



$f(x)$ **קעורה כלפי מטה** $(\cap)$ **בתחום** $x<-2$ **או** $2<x<5$ **, כלומר בתחומים אלה** $f'(x)$ **יורדת.**

$f(x)$ **קעורה כלפי מעלה** $(\cup)$ **בתחום** $x>5$ **או** $-2<x<2$ **, כלומר בתחומים אלה** $f'(x)$ **עולה.**

מכאן ניתן ללמוד כי $f'(x)$ **עוברת מירידה לעליה עבור** $x=-2$ **, או** $x=5$ **ואלו נקודות מינימום,**

ו- $f'(x)$ **עוברת מעליה לירידה עבור** $x=2$ **, וזו נקודת מקסימום.**

(כמו כן, הנקודות $(5,2e)$ **,** $(-2,0)$ **ו-** $(2,0)$ **הן נקודות פיתול של** $f(x)$ **, כפי שניתן לראות בגרף הנתון.)**

תשובה: $x=-2$ **מינימום ,** $x=5$ **מינימום ,** $x=2$ **מקסימום.**

ב. נתון כי $g(x)=\ell n\left[f(x)\right]$

(1) הפונקציה $g(x)$ **מוגדרת כאשר** $f(x)>0$ **, כלומר על פי הגרף הנתון עבור** $x>2$ **, או** $x<-2$ **.**

תשובה: $x>2$ **, או** $x<-2$ **.**

(2) כאשר $f(x)\to 0$ **, מתקיים** $g(x)\to-\infty$ **ובהתאם הישרים** $x=2$ **, או** $x=-2$ **אסימפטוטות אנכיות.**

תשובה: $x=2$ **, או** $x=-2$ **.**

(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון. $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

המכנה חיובי בתחום ההגדרה, ו- $g'(x)=0$ **כאשר** $f'(x)=0$ **,**

ותחומי עלייה וירידה זהים בתחום ההגדרה $x>2$ **, או** $x<-2$ **.**

מכאן ש- $x=4$ **מקסימום, ונקודת הקיצון של** $g(x)$ **היא** $(4,\ell n(3e))\leftarrow\ (4,\ell n\left[f(4)\right])$

תשובה: $(4,\ell n(3e))$ **מקסימום.**

(4) כאשר $x \to \pm\infty$, מתקיים $f(x) \to 1.5e$ וקיימת אסימפטוטה אופקית $y = 1.5e$.

בהתאם: כאשר $x \to \pm\infty$, מתקיים $g(x) \to \ell n(1.5e)$

וקיימת אסימפטוטה אופקית $y = \ell n(1.5e)$, כפי שגם הובא כנתון.

הסקיצה המתאימה: