<u>סיכום - בעיות מינימום מקסימום - שאלון 806</u>

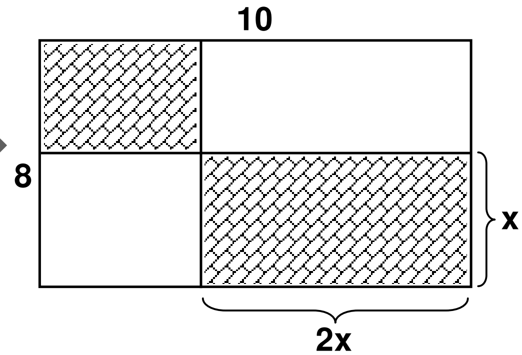
1. **בבעיות מינימום מקסימום יש לחפש את <u>נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט.</u>**
2. **בשאלות מינימום מקסימום חובה להראות בעזרת טבלה או בעזרת נגזרת שנייה שאכן מדובר על מינימום או מקסימום.**
3. **לצורך קיצור התהליך, ניתן להשתמש ב: $\left(y'\ \text{מונה}\right)'$ כאשר המכנה של הנגזרת הוא חיובי.**
4. **את תחום ההגדרה יש להכניס לטבלה, כולל מגבלות גיאומטריות (ראה דוגמא בהמשך).**
5. **כאשר בשאלה מחפשים למשל מינימום ויצא לכם מקסימום - ייתכן שהמינימום נמצא בקצוות (או להיפך), ולפיכך יש לבדוק את הקצוות של התחום.**
6. **בשאלות מינימום מקסימום שבהן יש ביטוי שעליכם <u>להוכיח</u>, אין להשתמש בביטוי עצמו לצורך בניית הפונקציה, אלא רק להוכיח שהביטוי אכן נכון.**
7. **בשאלות מינימום מקסימום ניתן להשתמש בכל משפטי הגיאומטריה כולל משפט פיתגורס, משפטי פרופורציה ודמיון, משפט חוצה הזווית, וכן בכל תורת הטריגונומטריה כולל משפטי הסינוס והקוסינוס, כל סוגי הזהויות ובנוסחאות למציאת שטחים.**
8. **ניתן להיעזר בשיקולי סימטריה בבעיות מינימום מקסימום, כאשר מלווים את השיקולים בהסבר מילולי מתאים (ראה דוגמא בהמשך).**
   ברור שניתן למצוא את שיעורי הנקודות דרך פתרון מתמטי.
9. **בשאלות מינימום ומקסימום עם גרפים יש לעשות שימוש בפרמטר t.**
   אחרי מציאת הפונקציה שאותה צריך לגזור, ניתן להחליף את t במשתנה x, ולגזור את הפונקציה לפי x.
10. **מרחק אנכי בין שתי נקודות הוא הפרש ה- y שלהן: תמיד ה-y העליון פחות ה-y התחתון, בלי קשר באיזה רביע נמצאות הנקודות.**
    מרחק אופקי בין שתי נקודות הוא הפרש ה- x שלהן: תמיד ה-x הימני פחות ה-x השמאלי, בלי קשר באיזה רביע נמצאות הנקודות.
11. **כאשר אתם מתבקשים למצוא שטח מקסימלי וגם היקף מקסימלי, יש לזכור שמדובר בשתי שאלות <u>שונות</u> – כלומר, אם מצאתם את ה- x שעבורו השטח הוא מקסימלי – <u>אין</u> פירוש הדבר שעבור אותו ה- x גם ההיקף הוא מקסימלי.**

12. כאשר מבקשים למצוא את הנקודה שבה יש לפונקציה $f(x)$ את השיפוע המקסימלי,
יש לגזור את הפונקציה ולקבל את פונקציית השיפוע – נקרא לה $F(x)$.
כעת, עבור הפונקציה $F(x)$ נחפש מקסימום (מוחלט) .
אחרי מציאת המקסימום הנ"ל, יש להציב את ה- x שהתקבל בפונקציה $f(x)$ על-מנת למצוא את הנקודה שבה לפונקציה $f(x)$ יש את השיפוע המקסימלי.
(שיעור ה-x שהתקבל הוא נקודה חשודה בפיתול של הפונקציה $f(x)$).

13. בשאלות שבהן מבקשים להוכיח אי-שוויון ניתן להשתמש במציאת נקודת המינימום המוחלט או המקסימום המוחלט, ובעזרתן להוכיח את אי-השוויון.
לדוגמא: אם רוצים להוכיח שהפונקציה תמיד חיובית, נוכיח שערך הפונקציה בנקודת המינימום המוחלט שלה הוא חיובי (כלומר מעל ציר ה- x).

<u>דוגמא למגבלה גיאומטרית</u>

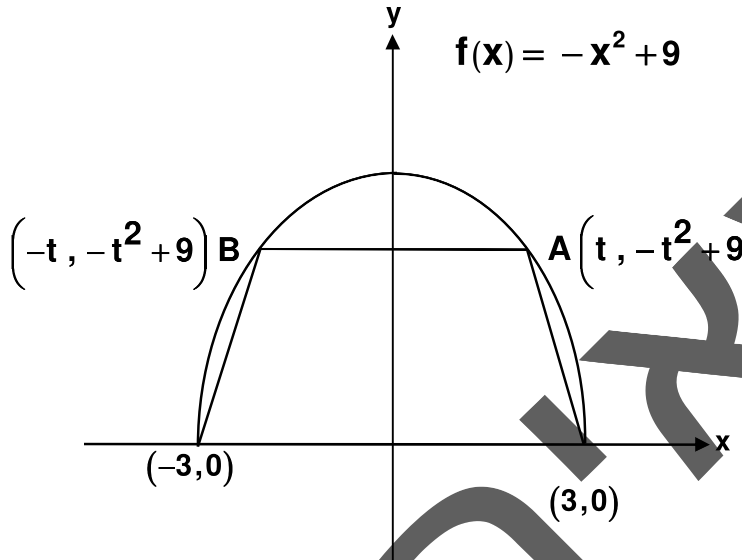
חשב מה צריך להיות הרוחב x של המלבן הימני כדי שסכום שטחי המלבנים המקווקווים יהיה מינימלי.



מכיוון שאורך המלבן הגדול נתון (10) נוצרת מגבלה גיאומטרית עבור 2x: $0 \le 2x \le 10$.
מכיוון שרוחב המלבן הגדול נתון (8) נוצרת מגבלה גיאומטרית עבור x : $0 \le x \le 8$.
לכן המגבלה הכללית על x תהיה: $0 \le x \le 5$.
מגבלה זו על x עלינו להכניס לטבלה. (מבחן הנגזרת הראשונה).

<u>**דוגמאות לשיקולי סימטריה**</u>

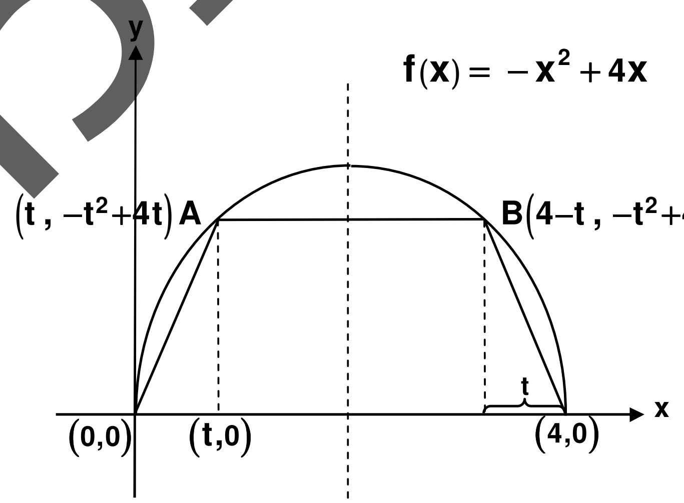
1. אם נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t , אז שיעור ה- x של נקודה B יהיה $-t$, וזאת עקב שיקולי סימטריה:



הערה: על מנת למצוא את נקודות A ו- B בדרך מתמטית יש לפתור את מערכת המשוואות -

$$y = -t^2+9 \;\; , f(x) = -x^2+9$$

2. אם נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t , אז שיעור ה- x של נקודה B יהיה $4-t$, וזאת עקב שיקולי סימטריה:



בעיות מינימום מקסימום טריגונומטרית

1. בשאלות מינימום מקסימום כאשר המשתנה x הוא זווית, מומלץ בשלב הראשון, "לרוץ" עם המשתנה x ולמצוא את שאר הזוויות כפונקציה של x.
2. על מנת ליצור את הפונקציה שעבורה יש למצוא את המינימום או המקסימום (פונקצית המטרה) יש להשתמש בכל תורת הטריגונומטריה כולל משפטי הסינוס והקוסינוס, בנוסחאות למציאת שטחים ובכל סוגי הזהויות. (ראה סעיף ז').
3. כאשר מתקבלת הפונקציה הטריגונומטרית מומלץ אם ניתן, לפשט אותה לפני הגזירה. לצורך כך, יש לדעת את הזהויות, כולל זווית כפולה בסינוס ובקוסינוס, והפיכת מכפלת פונקציות לסכום פונקציות (לא מופיע בדף הנוסחאות).

למשל:

א. $f\left(x\right)=\cos^4 x-\sin^4 x=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\cdot\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=1\cdot\cos 2x$.

ב. $f\left(x\right)=\cos^4 x+\sin^4 x=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-2\sin^2\cos^2=1-\dfrac{\sin^2 2x}{2}$.

ואם רוצים לעשות "עוד צעד" $1-\dfrac{\sin^2 2x}{2}=1-\dfrac{1-\cos 4x}{4}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{\cos 4x}{4}$

בעיות מינימום מקסימום עם אינטגרלים

1. השאלות יכולות להיות בנושא מינימום מקסימום לאינטגרל, או בעיות מינימום מקסימום לגבי שטחים, או בעיות מינימום מקסימום לגבי נפחים.
2. יש לבצע את האינטגרל עם הפרמטר הקבוע, כאשר x הוא המשתנה. בפונקציה שהתקבלה, הפרמטר הקבוע הופך להיות המשתנה (מומלץ להפוך אותו למשתנה x). כעת יש לבצע את התהליך הרגיל למציאת מינימום או מקסימום לפונקציה שהתקבלה.
3. הפרמטר יופיע בדרך כלל בגבולות של האינטגרל, יהיו שאלות שאתם תצטרכו לבחור את הפרמטר ולסמן את גבולות האינטגרל עם פרמטר זה.

בעיות מינימום מקסימום במרחב

1. הגופים שאותם עליכם להכיר הם: מנסרה ישרה, תיבה, קובייה, פירמידה ישרה, גליל ישר, וחרוט ישר.
2. על מנת לפתור תרגילים בנושא זה יש לדעת את הנוסחאות לשטח מעטפת, שטח פנים ונפח של הגופים הנ"ל.
3. כאשר נתון שהגוף פתוח מלמעלה ומבקשים למצוא את שטח הפנים, אין להתחשב בבסיס העליון אלא רק בתחתון.
4. בנוסף יש שאלות, בעיות מינימום מקסימום בהנדסת המרחב, שבהן עוסקים בהרכבת גופים – "מדביקים" יחד שני גופים או יותר.

מנסרה ישרה (משולשת, תיבה, קובייה):

נגדיר: p - היקף הבסיס, S - שטח הבסיס, h - גובה המנסרה, M - שטח מעטפת, V - נפח המנסרה.

הנוסחאות:

$$M = ph$$
$$P = M + 2S$$
$$V = Sh$$

אלכסון התיבה: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

גליל

נגדיר: h – גובה הגליל, R – רדיוס בסיס הגליל, M – שטח מעטפת הגליל, P – שטח הפנים, V – נפח הגליל.

הנוסחאות:

$$M = 2\pi Rh$$
$$P = 2\pi R^2 + M$$
$$V = \pi R^2 h$$

היקף החתך הצירי של הגליל: $4R + 2h$

<u>פירמידה ישרה</u>

1. בפירמידה ישרה הגובה עובר דרך מרכז המעגל החוסם את מצולע הבסיס, לכן בפירמידה ישרה כל המקצועות הצדדים שווים זה לזה, והפאות הצדדיות הם משולשים שווה-שוקיים.

2. אם בסיס הפירמידה הוא מצולע משוכלל הפירמידה נקראת פירמידה משוכללת.

נגדיר: S – שטח הבסיס, h – גובה הפירמידה, M – שטח המעטפת (סכום כל שטחי הפאות הצדדיות). P – שטח הפנים, V – הנפח.

הנוסחאות:

$$P = M + S$$

$$V = \frac{Sh}{3}$$

<u>חרוט ישר</u>

נגדיר: h – גובה החרוט, R – רדיוס בסיס החרוט, L – הקו היוצר של החרוט, M – שטח מעטפת, P – שטח הפנים, V – נפח החרוט, α - הזוית המרכזית כאשר המעטפת פרושה.

הנוסחאות:

$$M = \pi RL$$

$$P = M + \pi R^2$$

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{R}{L}$$

היקף החתך הצירי של החרוט: $2R + 2L$

הקשר בין הקו היוצר, גובה החרוט, ורדיוס הבסיס הוא בעזרת משפט פיתגורס: $R^2 + h^2 = L^2$

<u>הערה:</u> הזוית α יכולה להיות גדולה מ- 180°.

<u>בעיות קיצון עם בעיות תנועה</u>

1. **בדרך כלל בסוג שאלות אלה נרצה לדעת את הזמן שבו המרחק בין שני הגופים הנעים יהיה מינימלי, או מציאת המרחק עבור זמן מינימלי.**
2. **בשאלות אלה ייתכן שיהיה שימוש במשפט פיתגורס או במשפט הקוסינוס וזאת כאשר הדרכים לא מאונכות זו לזו.**

<u>בעיות קיצון כלכליות</u>

בעיות קיצון כלכליות יכולות להופיע בכמה תחומים כמו למשל:

בקנייה ומכירה של מוצרים - מחפשים רווח מכסימלי,

בבעיות תנועה - מחפשים את המהירות על מנת שההוצאות תהיינה מינימאליות,

בבעיות במישור - משלבים עליות לכל מטר או לכל מ"ר ומחפשים את העלות מינימאלית,

בבעיות במרחב - משלבים עליות לכל מ"ר בגופים השונים, ומחפשים את העלות המינימאלית.

ולסיום:-

זכרו כי המסמך בא לתת לכם רק הנחיות כלליות ותזכורת לחומר הלימוד ואינו פותר אתכם מחזרה ותרגול של כל החומר!

בהצלחה בבחינה!!!