א. נתונה סדרה המקיימת את הכלל $a_{n+1} = a_n + 2n + 5$ **,** $a_1 = 0$ **, לכל** n **טבעי.**

$$(n=1) \quad a_2 = a_1 + 2\cdot1 + 5 = 0 + 2 + 5 = 7 \quad \rightarrow \boxed{a_2 = 7}$$

$$(n=2) \quad a_3 = a_2 + 2\cdot2 + 5 = 7 + 4 + 5 = 16 \quad \rightarrow \boxed{a_3 = 16}$$

תשובה: $a_2 = 7$ **,** $a_3 = 16$ **.**

ב. מגדירים סדרה חדשה: $b_n = a_{n+1} - a_n$ **.**

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

$$b_n = a_n + 2n + 5 - a_n$$

$$\boxed{b_n = 2n + 5}$$

תשובה: $b_n = 2n + 5$ **.**

ג. נראה שהסדרה b_n **היא סדרה חשבונית.**

$$b_{n+1} - b_n = 2(n+1) + 5 - (2n+5)$$

$$b_{n+1} - b_n = 2n + 2 + 5 - 2n - 5$$

$$\boxed{b_{n+1} - b_n = 2}$$

הסדרה חשבונית כי ההפרש בין כל איבר לזה שקודם לו (עבור $n \geq 2$ **)**

הוא קבוע (אינו תלוי ב- n **), ולכן:** $d = 2$ **.**

תשובה: הוכַח, הפרש הסדרה הוא 2 **.**

ד. נתון שסכום n **האיברים הראשונים בסדרה** b_n **שווה ל-** a_5 .

$$(n=3) \quad a_4 = a_3 + 2\cdot3 + 5 = 16 + 6 + 5 = 27 \quad \rightarrow \boxed{a_4 = 27}$$

$$(n=4) \quad a_5 = a_4 + 2\cdot4 + 5 = 27 + 8 + 5 = 40 \quad \rightarrow \boxed{a_5 = 40}$$

$$S_n^b = 40$$

$$b_1 = 2\cdot1 + 5 = 7 \quad \rightarrow \boxed{b_1 = 7}, \quad d^b = 2$$

$$40 = \frac{n\left[2\cdot7 + 2(n-1)\right]}{2}$$

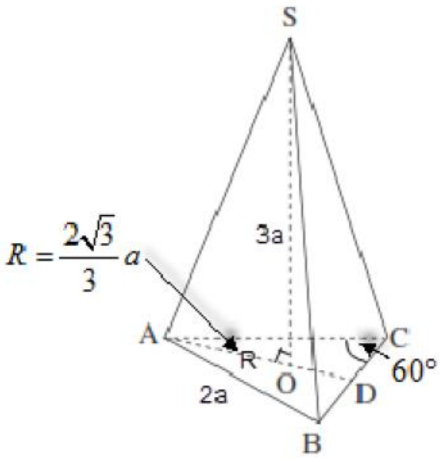
$$80 = n(14 + 2n - 2)$$

$$2n^2 + 12n - 80 = 0$$

$$\boxed{n = 4} \quad \cancel{n = -10} \quad \leftarrow n \text{ natural}$$

תשובה: $n = 4$ **.**

א. בסיס הפירמידה הישרה SABC הוא משולש שווה צלעות, שזוויותיו שוות ל- $60°$.
הגובה, בפירמידה ישרה, יורד למרכז המעגל החוסם, שהוא מפגש אנכים אמצעיים,
ובמקרה זה, של מש"ץ, גם למפגש תיכונים המחלקים זה את זה ביחס $2:1$ מהקדקוד.
מכאן ש- $AO = R$, רדיוס המעגל החוסם, ו- $AD = 1.5R$.
על פי משפט הסינוסים ב- ΔABC:



$$\frac{AB}{\sin 60°} = 2R$$

$$\frac{2a}{2\sin 60} = R$$

$$\boxed{R = \frac{2\sqrt{3}}{3}a}$$

$$AD = 1.5 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

$$\boxed{AD = a\sqrt{3}}$$

תשובה: $AD = a\sqrt{3}$.

ב. נתון כי נפח הפירמידה הוא $a^3\sqrt{3}$.

$$V = \frac{(0.5 \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 60°) \cdot SO}{3}$$

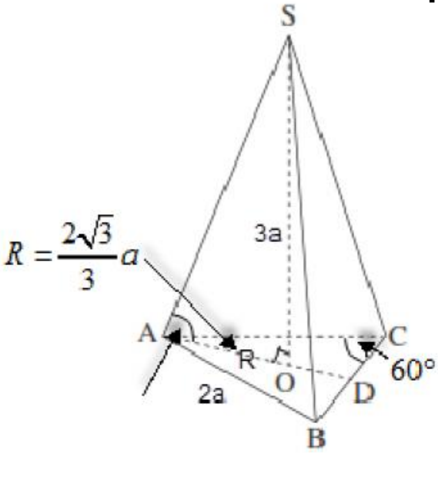
$$a^3\sqrt{3} = \frac{0.5 \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot SO}{3}$$

$$3a^3\sqrt{3} = a^2\sqrt{3} \cdot SO \quad / : a^2\sqrt{3} > 0$$

$$\boxed{SO = 3a}$$

תשובה: $SO = 3a$.

ג. נחשב את הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס, לדוגמה $\sphericalangle SAO$.



$\underline{\Delta SAO}$

$$\tan \sphericalangle SAO = \frac{SO}{AO} = \frac{3a}{\frac{2\sqrt{3}}{3}a} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\sphericalangle SAO = 68.95°}$$

תשובה: הזווית שבין מקצוע הצדדי לבסיס היא בת $68.95°$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=2x+4\cos x$ **בתחום** $0\le x\le\pi$ **.**

בנקודת חיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **:** $f(0)=2\cdot 0+4\cos 0=4$ **.**

תשובה: $(0,4)$**.**

ב. נמצא תחילה את נקודת הקצה השנייה, פרט ל- $(0,4)$ **.**

$$f(\pi)=2\cdot\pi+4\cos\pi=2\pi-4=2.283\quad\rightarrow\quad\boxed{(\pi\,,\,2.283)}$$

נמצא נקודות קיצון פנימיות.

$$\boxed{f'(x)=2-4\sin x}$$

$$0=2-4\sin x$$

$$\sin x=0.5=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\boxed{x=\frac{\pi}{6}+2\pi k}\qquad\boxed{x=\frac{5\pi}{6}2\pi k}$$

$$f(\frac{\pi}{6})=2\cdot\frac{\pi}{6}+4\cos\frac{\pi}{6}=4.511\quad\rightarrow\quad\boxed{(\frac{\pi}{6},4.511)}$$

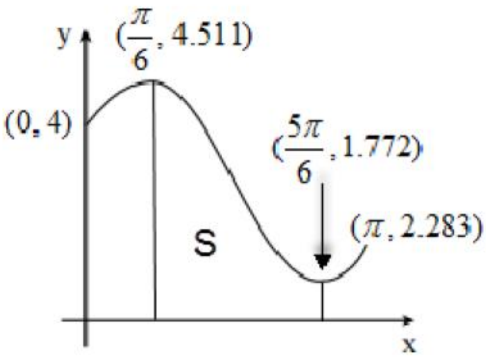
$$f(\frac{\pi}{6})=2\cdot\frac{5\pi}{6}+4\cos\frac{5\pi}{6}=1.772\quad\rightarrow\quad\boxed{(\frac{5\pi}{6},1.772)}$$

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, בעזרת ערכי הפונקציה:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f(x)$	4		4.511		1.772		2.283
$f'(x)$							
מסקנה	Min	↗	Max	↘	Min	↗	Max

תשובה: $(0,4)$ **,** $(\frac{5\pi}{6},1.772)$ **מינימום ,** $(\frac{\pi}{6},4.511)$ **, ,** $(\pi\,,\,2.283)$ **מקסימום.**

ג. הסקיצה המתאימה, כולל סימון השטח לסעיף ד.



ד.

$$S = \int_{\frac{®}{6}}^{\frac{5®}{6}} (2x + 4\cos x - 0)\, dx$$

$$S = (\frac{2x^2}{2} + 4\sin x) \Big]_{\frac{®}{6}}^{\frac{5®}{6}}$$

$$x = \frac{5®}{6}: \quad (\frac{5®}{6})^2 + 4\sin\frac{5®}{6} = 8.854$$

$$x = \frac{®}{6}: \quad (\frac{®}{6})^2 + 4\sin\frac{®}{6} = 2.274$$

$$S = 8.854 - 2.274$$

$$\boxed{S = 6.58}$$

תשובה: גודל השטח 6.58 **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a}{e^{2x}-10e^{x}}$ **.** $a\neq 0$ **פרמטר.**

(1) בתחום ההגדרה מכנה אינו מתאפס.

$$e^{2x}-10e^{x}\neq 0$$
$$e^{x}(e^{x}-10)\neq 0$$
$$e^{x}=10 \qquad e^{x}>0$$
$$\boxed{x\neq \ell n10}$$

תשובה: $x\neq \ell n10$ **.**

(2) $x=\ell n10$ **מאפס מכנה ולא מונה, ולכן הישר** $x=\ell n10$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $x=\ell n10$.

ב. הנקודה $(0,-\frac{1}{9})$ **נמצאת על גרף הפונקציה. נציב את שיעוריה בתבנית הפונקציה.**

$$-\frac{1}{9}=\frac{a}{e^{2\cdot 0}-10e^{0}}$$
$$-\frac{1}{9}=\frac{a}{1-10}$$
$$\boxed{a=1}$$

תשובה: $a=1$ **.**

ג. (1) נציב $a=1$ **בתבנית הפונקציה ונקבל:** $f(x)=\frac{1}{e^{2x}-10e^{x}}$ **.**

שתי הצבות זריזות במחשבון ומסקנות:

$f(-10)=-2202\to-\infty \quad f(5)=4.9\cdot 10^{-5}\to+0,$ **- לכן,** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה.

$$f'(x)=\frac{0-(2e^{2x}-10e^{x})}{(e^{2x}-10e^{x})^{2}}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{-2e^{2x}+10e^{x}}{(e^{2x}-10e^{x})^{2}}}$$
$$-2e^{2x}+10e^{x}=0$$
$$-2e^{x}(e^{x}-5)=0$$
$$e^{x}=5 \qquad -2e^{x}<0$$
$$x=\ell n5 \quad\to f(\ell n5)=\frac{1}{e^{2\ell n5}-10e^{\ell n5}}=-\frac{1}{25} \quad\to \boxed{(\ell n5,-\frac{1}{25})}$$

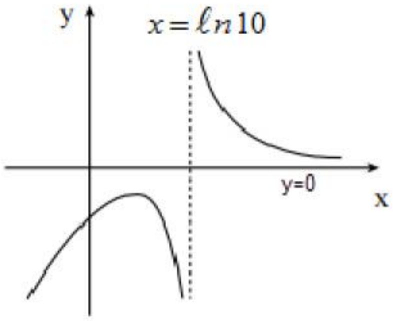
x		$\ell n\,5$		$\ell n\,10$	
$f'(x)$	+		-		-
מסקנה	↗	Max	↘		↘

תשובה: $(\ell n\,5, -\frac{1}{25})$ **מקסימום.**

(2) תשובה: עלייה: $x < \ell n\,5$ **, ירידה** $x > \ell n\,10$ **או** $\ell n\,5 < x < \ell n\,10$**.**

(3) תשובה: אין נקודות חיתוך עם ציר ה- x **(מונה הפונקציה חיובי).**

(4) סקיצה של גרף הפונקציה:



ד. $f(x) < 0$ **כאשר, על פי הסקיצה** $x < \ell n\,10$.

$f'(x) < 0$ **בירידה של** $f(x)$ **, על פי טבלת העלייה והירידה והסקיצה,**

כאשר $x > \ell n\,10$ **או** $\ell n\,5 < x < \ell n\,10$**.**

התחום המשותף, כאשר $f(x)$ **שלילית ויורדת, הוא** $\ell n\,5 < x < \ell n\,10$**.**

תשובה: $\ell n\,5 < x < \ell n\,10$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\ell n\,(1+x)}{2+2x}$.

הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית צ"ל חיובי, לכן $1+x>0$ **ובהתאם** $x>-1$.

$x=-1$ **מאפס את המכנה.**

תשובה: $x>-1$.

ב. שתי הצבות זריזות במחשבון ומסקנות:.

$$f(-0.99999)=-575646\to-\infty,\quad f(100{,}000)=5.7\cdot10^{-5}\to+0$$

לכן, הישר $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין, והישר** $x=-1$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $x=-1$ **אסימפטוטה אנכית.**

ג. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

$$0=\frac{\ell n\,(1+x)}{2+2x}$$

$$0=\ell n\,(1+x)$$

$$1+x=1$$

$$x=0\to\boxed{(0,0)}$$

תשובה: נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים היא $(0,0)$.

ד. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה ונקבע את סוגה.

$$f(x)=\frac{\ell n\,(1+x)}{2+2x}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{2+2x}{1+x}-2\ell n\,(1+x)}{(2+2x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{2(1+x)}{1+x}-2\ell n\,(1+x)}{(2+2x)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2-2\ell n\,(1+x)}{(2+2x)^2}}$$

$$2-2\ell n\,(1+x)=0$$

$$\ell n\,(1+x)=1$$

$$1+x=e$$

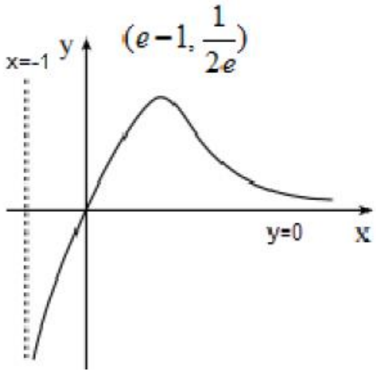
$$x=e-1$$

$$f(e-1)=\frac{\ell n\,(1+e-1)}{2+2(e-1)}=\frac{1}{2e}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=\frac{2-2\ell n\,(1+1)}{+}>0 \\ f'(e)=\frac{2-2\ell n\,(1+e)}{+}<0 \end{array}\right\}\boxed{(e-1,\frac{1}{2e})},Min$$

תשובה: $(e-1,\frac{1}{2e})$ **מקסימום.**

ה. סקיצה של גרף הפונקציה.



ו. $-f(x)$ **היא הפונקציה הנגדית של** $f(x)$ **.**

תחום ההגדרה נשאר זהה, וכך גם האסימפטוטה האנכית.

במקרה זה גם האסימפטוטה האופקית נשארת זהה, כי היא $y=0$ **.**

ערכי ה- y **מחליפים סימן, ותחומי עלייה וירידה מתהפכים (** $(-f(x))'=-f'(x)$

ולכן הנקודה $(e-1,-\frac{1}{2e})$ **תהייה נקודת מינימום.**

סקיצה מתאימה: