א. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית יורדת $a_1 , a_2 , a_3 , ...$ **, שמנתה** $0 < q < 1$ **.**

נראה שהסדרה a_n^* **, בה הוחלפו סימני האיברים במקומות הזוגיים, היא הנדסית ונמצא את מנתה.**

$\frac{a_{n+1}^*}{a_n^*} = -\frac{a_{n+1}}{a_n} = -q$ **, כי אחד מכל שני איברים עוקבים שינה סימן.**

נתון כי: $S = 4S^*$

נפתור את המשוואה:

$$S = 4S^*$$

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{4a_1}{1-(-q)} \quad / : a_1 \neq 0$$

$$\frac{1}{1-q} = \frac{4}{1+q}$$

$$1+q = 4(1-q)$$

$$1+q = 4-4q$$

$$5q = 3$$

$$\boxed{q = 0.6}$$

תשובה: $q = 0.6$ **.**

ב. נראה שסדרת האיברים במקומות הזוגיים, או האי-זוגיים, היא סדרה הנדסית ונמצא את מנתה.

$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_n q^2}{a_n} = q^2$ **, כלומר המנה בין כל שני איברים במקומות הזוגיים (או אי-זוגיים) קבועה (אינה תלויה ב-** n **).**

ובהתאם אלו סדרות הנדסיות אינסופית, שמנתה q^2 , **כאשר האיבר הראשון הוא** a_1 **או** $a_2 = a_1 q = 0.6a_1$ **.**

נחשב את היחס המבוקש.

$$\frac{S_{\text{Even}}}{S_{\text{Odd}}} = \frac{\frac{0.6a_1}{1-0.6^2}}{\frac{a_1}{1-0.6^2}}$$

$$\frac{S_{\text{Even}}}{S_{\text{Odd}}} = \frac{0.6a_1}{0.64} \cdot \frac{0.64}{a_1}$$

$$\boxed{\frac{S_{\text{Even}}}{S_{\text{Odd}}} = 0.6}$$

תשובה: היחס הוא 0.6 **.**

א. בסיס הפירמידה ABCDE **הוא ריבוע, שאורך צלעו** $2a$ **.**

על פי משפט פיתגורס, ב- ΔBDC **:**

$$(BD)^2 = (2a)^2 + (2a)^2$$

$$(BD)^2 = 8a^2$$

$$BD = a\sqrt{8} \text{ ס"מ}$$

כיוון שהאלכסונים בריבוע חוצים זה את זה,

הרי ש- $OB = \frac{a\sqrt{8}}{2} = a\sqrt{2}$ **.**

גובה הפירמידה מאונך לבסיס ולכן ΔEOB **ישר זווית.**

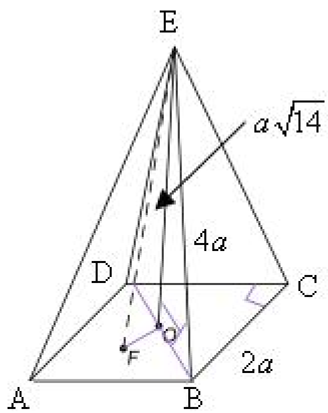
על פי משפט פיתגורס, ב- ΔEOB **, כאשר אורך המקצוע הצדדי** $4a$ **ס"מ:**

$$(OE)^2 = (4a)^2 - (a\sqrt{2})^2$$

$$(OE)^2 = 14a^2$$

$$OE = a\sqrt{14} \text{ ס"מ}$$

תשובה: גובה הפירמידה $OE = a\sqrt{14}$ **ס"מ**



ב. שטח המשולש EFO **שווה ל-** $2a^2$ **סמ"ר.**

גובה הפירמידה מאונך לבסיס ולכן ΔEOF **ישר זווית.**

$$2a^2 = \frac{a\sqrt{14}\cdot FO}{2}$$

$$\frac{4a}{\sqrt{14}} = FO$$

$$FO = 1.069a \text{ ס"מ}$$

הזווית שבין הישר EF **לבסיס הפירמידה היא** $\sphericalangle EFO$ **,**

שהיא הזווית שבין הישר EF **להיטל שלו על הבסיס** FO **.**

$\underline{\Delta EFO}$

$$\tan\sphericalangle EFO = \frac{EO}{FO}$$

$$\tan\sphericalangle EFO = \frac{a\sqrt{14}}{1.069a}$$

$$\boxed{\sphericalangle EFO = 74.05^\circ}$$

תשובה: הזווית שבין הישר EF **לבסיס הפירמידה היא בת** 74.05° .

ג. נתון כי נפח הפירמידה הוא 15 סמ"ק.

$$V = \frac{(AB)^2 \cdot EO}{3}$$

$$15 = \frac{(2a)^2 \cdot a\sqrt{14}}{3}$$

$$45 = 4a^3\sqrt{14}$$

ס"מ 8.66

$$3.0067 = a^3$$

$$\boxed{a = 1.44}$$

תשובה: $a = 1.44$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x$ **בתחום** $-\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{3}{4}\pi$ **.**

על פי הזהות $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ **נקבל ש-** $f(x)=-\cos 2x$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **:** $(0,-1) \leftarrow f(0)=-\cos(2\cdot 0)=-1$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$-\cos 2x=0$$
$$\cos 2x=0$$
$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$
$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$$

עבור $k=0,1,-1,-2$ **נקבל** $x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}$

תשובה: $(0,-1)$ **,** $(\frac{\pi}{4},0)$ **,** $(\frac{3\pi}{4},0)$ **,** $(-\frac{\pi}{4},0)$ **,** $(-\frac{3\pi}{4},0)$**.**

ב. נקודות הקצה: $(\frac{3\pi}{4},0)$ **,** $(-\frac{3\pi}{4},0)$**.**

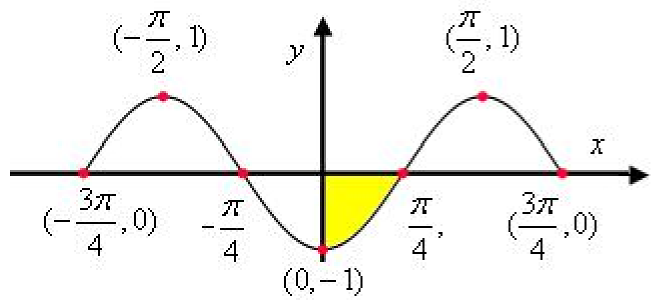
$$\boxed{f'(x)=2\sin 2x}$$
$$\sin 2x=0$$
$$2x=\pi k$$
$$x=\frac{\pi}{2}k$$
$$k=0 \;\rightarrow x=0 \;\rightarrow (0,1)$$
$$k=1 \;\rightarrow x=\frac{\pi}{2} \;\rightarrow f(\frac{\pi}{2})=-\cos(2\cdot\frac{\pi}{2})=1 \;\rightarrow (\frac{\pi}{2},1)$$
$$k=-1 \;\rightarrow x=-\frac{\pi}{2} \;\rightarrow f(-\frac{\pi}{2})=-\cos(2\cdot\frac{-\pi}{2})=1 \;\rightarrow (-\frac{\pi}{2},1)$$

נמצא את סוג הקיצון, בעזרת ערכי הפונקציה:

x	$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$
y	0		1		-1		1		0
מסקנה	Min	↗	Max	↘	Min	↗	Max	↘	Min

תשובה: $(\frac{\pi}{2},1)$ **,** $(-\frac{\pi}{2},1)$**מקסימום ,** $(0,-1)$ **,** $(\frac{3\pi}{4},0)$ **,** $(-\frac{3\pi}{4},0)$ **מינימום.**

ג. הסקיצה המתאימה (כולל השטח לסעיף ד):



ד. נחשב את גודל השטח (הצהוב).

$$S=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(0-(-\cos 2x))\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2x)\,dx$$

$$S=(\frac{\sin 2x}{2})\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$S=0.5\sin(\frac{2\pi}{4})-0.5\sin(2\cdot 0)$$

$$\boxed{S=0.5}$$

תשובה: גודל השטח הוא 0.5**.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=2e^{2x}-e^{x}$ **.**

נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה.

$$f'(x)=4e^{2x}-e^{x}$$
$$0=4e^{2x}-e^{x} \quad /:e^{x}>0$$
$$0=4e^{x}-1$$
$$e^{x}=0.25 \quad \to x=\ell n\,0.25$$
$$f''(x)=8e^{2x}-e^{x} \quad \to f''(\ell n\,0.25)=8e^{2\ell n 0.25}-e^{\ell n 0.25}>0 \quad \to Min$$
$$f(\ell n\,0.25)=2e^{2\ell n 0.25}-e^{\ell n 0.25}=-0.125 \quad \to \boxed{(\ell n\,0.25,-0.125)}$$

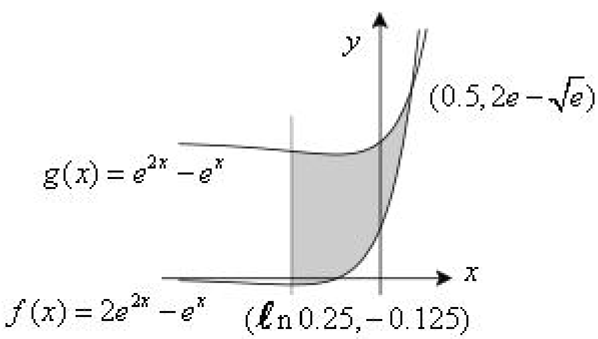
תשובה: $(\ell n\,0.25,-0.125)$ **מינימום.**

ב. נתונה הפונקציה $g'(x)=f(x)$ **, כאשר** $g(0.5)=f(0.5)=2e^{2\cdot 0.5}-e^{0.5}=2e-\sqrt{e}$ **.**

כלומר, $(0.5,2e-\sqrt{e})$ **נקודה משותפת לשתי הפונקציות.**

נמצא את הפונקציה הקדומה $g(x)$ **.**

$$g(x)=\int f(x)dx$$
$$g(x)=\int(2e^{2x}-e^{x})dx$$
$$g(x)=e^{2x}-e^{x}+c$$
$$2e-\sqrt{e}=e^{2\cdot 0.5}-e^{0.5}+c$$
$$2e-\sqrt{e}=e-\sqrt{e}+c \quad \to c=e$$
$$\boxed{g(x)=e^{2x}-e^{x}+e}$$



תשובה: $g(x)=e^{2x}-e^{x}+e$ **.**

ג. נמצא את השטח המבוקש : הפרש פונקציות: $e^{2x}-e^{x}+e-(2e^{2x}-e^{x})=e^{2x}-e^{x}+e-2e^{2x}+e^{x}=-e^{2x}+e$

$$S=\int_{\ell n 0.25}^{0.5}(-e^{2x}+e)dx$$
$$S=-\frac{e^{2x}}{2}+ex\Big]_{\ell n 0.25}^{0.5}$$
$$S=(-\frac{e^{2\cdot 0.5}}{2}+e\cdot 0.5)-(-\frac{e^{2\cdot \ell n 0.25}}{2}+e\cdot \ell n\,0.25)$$
$$S=0-(-\frac{1}{32}+e\cdot \ell n\,0.25) \quad ...\ell n\,0.25=\ell n\,4^{-1}=-\ell n\,4$$
$$\boxed{S=\frac{1}{32}+e\ell n\,4=3.8}$$

תשובה: גודל השטח המבוקש הוא $\frac{1}{32}+e\ell n\,4=3.8$ **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\ell n^2(x+e)$.

על פי הגדרת פונקצית ה- ℓn **נקבל** $x+e>0$ **ולכן** $x>-e$

תשובה: $x>-e$.

ב. נמצא את שיעור נקודת הקיצון ואת סוגה.

$$f'(x)=\frac{2\ell n(x+e)\cdot 1}{x+e}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2\ell n(x+e)}{x+e}}$$

$$0=\ell n(x+e)$$

$$x+e=1$$

$$x=1-e$$

$$f(1-e)=\ell n^2(1+e-e)\quad\rightarrow\boxed{(1-e,0)}$$

כיוון שהפונקציה $f(x)=\ell n^2(x+e)$ **היא פונקציה אי-שלילית, הרי שזו נקודת מינימום (מוחלט).**

תשובה: $(1-e,0)$ **מינימום.**

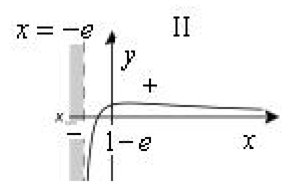
ג. על פי סעיפים א-ב, הסקיצה המתאימה היא של גרף II .

שבו גרף הנגזרת $f'(x)$ **מחליף סימנים משליליות לחיוביות,**

כלומר $f(x)$ **עוברת מירידה לעליה בנקודת המינימום.**

כאשר שיעור ה- x **שלילי ומתאים עבור** $1-e$.

גם האסימפטוטה המצוירת $x=-e$ **מתאימה לתחום ההגדרה.**



תשובה: גרף II .