א. נסמן ב- x את הדרך (ק"מ) שנסעה מכונית ב עד הפגישה ביום הראשון.
נסמן ב- t את הזמן (שעות) שנסעה מכונית ב עד הפגישה ביום הראשון.
יש למצוא את $2x+150$, סכום מרחקי המכוניות, שהוא המרחק מ- A ל- B.
נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה: (המספרים בסוגריים מראים את סדר מילוי הטבלה, להסבר הפיתרון)
ביום השני, המהירויות זהות למהירויות של היום הראשון
והמרחקים של כל מכונית זהים לזו של האחרת ביום הראשון.

		זמן - t שעות	מהירות - v קמ"ש	דרך-מרחק - s ק"מ
ביום הראשון	מכונית א מעיר A ל- C	(4) $2.25t$	(6) $\frac{x+150}{2.25t}$	(2) $x+150$
	מכונית ב מעיר B ל- C	(3) t	(5) $\frac{x}{t}$	(1) x
ביום השני	מכונית א מ- C לעיר B	(11) $\frac{2.25tx}{x+150}$	(7) $\frac{x+150}{2.25t}$	(9) x
	מכונית ב מ- C לעיר A	(12) $\frac{(x+150)t}{x}$	(8) $\frac{x}{t}$	(10) $x+150$

ביום השני נסעו המכוניות זמן שווה, לכן נשווה את זמני הנסיעה.

$$\frac{2.25tx}{x+150}=\frac{(x+150)t}{x} \quad /:t\neq 0$$

$$\frac{2.25x}{x+150}=\frac{(x+150)}{x} \quad /\cdot x(x+150)$$

$$2.25x^2=(x+150)^2 \quad \sqrt{\ }$$

$$1.5x=x+150$$

$$x=300 \quad \rightarrow \boxed{2x+150=750}$$

ניתן היה להוציא שורש, במהלך הפתרון, כי שני האגפים חיוביים.
תשובה: המרחק מ- A ל- B הוא 750 ק"מ.

ב. ביום השלישי עברו שתי המכוניות, יחדיו, את 750 הק"מ שבין הערים, במשך 6 שעות.

סמן ב- t את הזמן (שעות) שנסעה מכונית ב עד הפגישה ביום הראשון.

$$6\cdot\frac{300+150}{2.25t}+6\cdot\frac{300}{t}=750 \quad /:6$$

$$\frac{200}{t}+\frac{300}{t}=125$$

$$t=4$$

$$v_1=\frac{200}{4}=50,\quad v_2=\frac{300}{4}=75$$

תשובה: מהירות מכונית א 50 קמ"ש, מהירות מכונית ב 75 קמ"ש.

א. נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ **, שבה** $a_1 = 4, a_n = 310$ **, והפרשה** $d = 3$ **.**

נמצא את מספר האיברים בסדרה הנתונה:

$$310 = 3 + 3(n-1)$$
$$306 = 3(n-1)$$
$$102 = n-1$$
$$n = 103$$

כלומר, בסדרה <u>הנתונה</u> 103 **איברים.**

מהסדרה בנו סדרה חדשה : $a_1 + a_2 \quad , \quad a_2 + a_3, \quad ... \quad , a_3 + a_4$ **.**

נשים לב שבסדרה החדשה יש $103 - 1 = 102$ **איברים, כי האיבר האחרון בה יהיה** $a_{102} + a_{103}$ **.**

תשובה: בסדרה בחדשה יש 102 **איברים.**

ב. נראה כי הסדרה החדשה, שנסמנה כ- b_n **, היא סדרה חשבונית.**

$$b_n = a_n + a_{n+1}$$
$$b_{n+1} = a_{n+1} + a_{n+2}$$
$$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} + a_{n+2} - (a_n + a_{n+1})$$
$$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} + a_{n+2} - a_n + a_{n+1}$$
$$b_{n+1} - b_n = + a_{n+2} - a_n$$
$$b_{n+1} - b_n = 2d$$
$$\boxed{b_{n+1} - b_n = 6}$$

לכן הסדרה חשבונית, והפרשה הקבוע הוא 6 **.**

איברה הראשון הוא: $b_1 = a_1 + a_2 = 4 + 7 = 11$

נחשב את סכומה.

$$S_{102} = \frac{102 \cdot [2 \cdot 11 + 6(102-1)]}{2}$$
$$S_{102} = 51 \cdot (22 + 6 \cdot 101)$$
$$\boxed{S_{102} = 32,028}$$

תשובה: הוכַח.

ב. נתון כי $a_2{}^2 - a_1{}^2 = 64$ **, לכן** $b_1 = 64$ **.**

נביע את האיבר האחרון בסדרה החדשה, כלומר את b_{n-1} **, באמצעות** n **ו-** d **.**

$$b_{n-1} = b_1 + d_b(n-1-1)$$
$$\boxed{b_{n-1} = 64 + 2d^2(n-2)}$$

תשובה: סכום הסדרה החדשה הוא $32,028$ **.**

ג. בסדרה החדשה מחקו את האיבר השני , השישי, העשירי והן הלאה.

המקומות של האיברים שנמחקו מהווים סדרה חשבונית שהפרשה 4 .

נסמן סדרה זו כ- c_n , כאשר $c_1 = 2$, $d = 4$,

ואיברה האחרון $c_n \le 102$, כי בסדרה b_n יש 102 איברים.

(לא ידוע האם 102 הוא בסדרה החדשה, כלומר גם האם a_{102} נמחק)

$$2 + 4(n-1) \le 102$$
$$4(n-1) \le 100 \quad / : 4$$
$$n - 1 \le 25$$
$$n \le 26 \quad \rightarrow n = 26$$

(קבלנו מספר שלם, לכן גם a_{102} נמחק).

תשובה: נמחקו 26 איברים.

א. ההסתברות שתלמיד כלשהו לעבור מבחן נהיגה היא p **(** $0 < p \le 1$ **)**

ידוע שההסתברות שהתלמיד יעבור את המבחן בפעם הראשונה (p **) (ואז כמובן לא ניגש יותר למבחן)**

גדולה פי $\frac{27}{8}$ **מההסתברות שיעבור את המבחן רק בפעם הרביעית (** $(1-p)^3 \cdot p$ **).**

$$p = \frac{27}{8} \cdot (1-p)^3 \cdot p \quad / : p > 0$$

$$1 = \frac{27}{8} \cdot (1-p)^3 \quad / \sqrt[3]{\ }$$

$$1 = \frac{3}{2}(1-p)$$

$$\frac{2}{3} = 1 - p$$

$$\boxed{p = \frac{1}{3}}$$

תשובה: $p = \frac{1}{3}$ **.**

ב. יש למצוא את ההסתברות שתלמיד יעבור את המבחן רק בפעם השנייה (לאחר שייכשל בראשונה),

אם ידוע שיעבור את המבחן לאחר שני מבחנים לכל היותר (מבחן אחד או שניים),

$$\text{P(will pass the 2nd test / will pass after 2 at the most)} = \frac{\text{P(2nd test} \cap \text{2 at the most)}}{\text{P(2 at the most)}}$$

$$P = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}} = 0.4$$

תשובה: ההסתברות היא 0.4 **.**

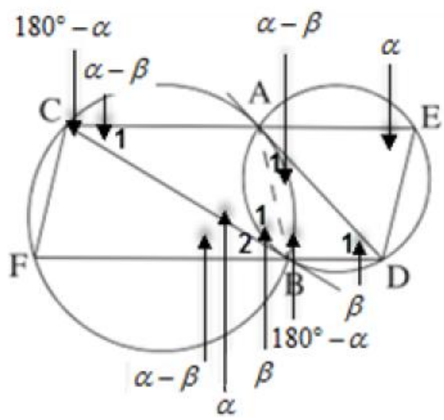
ג. שני נבחנים יזדקקו <u>סך הכול</u> ל- 3 **מבחנים בדיוק,**

אם אחד מהם יעבור במבחן הראשון והשני יעבור במבחן השני,

או השני יעבור במבחן הראשון והראשון במבחן השני:

$$P = \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}) + (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{4}{27}$ **.**



נתונים

1. AD משיק למעגל השמאלי ב- A .

2. CB משיק למעגל הימני ב- B .

עבור ג: **3.** $BD = 4$ ס"מ . **3.** $AC = 9$ ס"מ .

צ"ל:

א. $\sphericalangle AED + \sphericalangle FCA = 180°$.

ב. (1) $CEDF$ מקבילית.

ג. (2) $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BDA}}$.

הסבר		טענה	נימוק
	5	$\sphericalangle E = \sim$	סימון
5	6	$\sphericalangle ABD = 180° - \sim$	זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל משלימות ל- $180°$
6	7	$\sphericalangle ABF = \sim$	זוויות צמודות משלימות ל- $180°$
7	8	$\sphericalangle ACF = 180° - \sim$	זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל משלימות ל- $180°$
8 ,5	9	$\sphericalangle AED + \sphericalangle FCA = 180°$	חישוב
מ.ש.ל. א			
9	10	$CF \parallel ED$	זוויות חד צדדיות משלימות ל- $180°$
7	11	$\sphericalangle B_1 =$	סימון
11 ,7	12	$\sphericalangle B_2 = \sim -$	הפרש זוויות
2	13	CB משיק למעגל הימני ב- B	נתון
13 ,11	14	$\sphericalangle D_1 =$	זווית בין משיק למיתר
14 ,6	15	$\sphericalangle A_1 = \sim -$	סכום זוויות ΔABD הוא $180°$
1	16	AD משיק למעגל השמאלי ב- A	נתון
16 ,15	17	$\sphericalangle C_1 = \sim -$	זווית בין משיק למיתר
17 ,12	18	$\sphericalangle C_1 = \sphericalangle B_2$	כלל המעבר
18	19	$CE \parallel FD$	אם זוויות מתחלפות שוות אז הישרים מקבילים
19 ,10	20	$CEDF$ מקבילית	שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות
מ.ש.ל. ב (2)			
19	21	$h_{A_{BD}} = h_{B_{AC}}$	מרחקים שווים בין ישרים מקבילים
21 ,4 ,3	22	$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BDA}} = \frac{9h_{B_{AC}} \cdot 0.5}{4h_{A_{BD}} \cdot 0.5}$	נוסחת שטח משולש
22 ,21	23	$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BDA}} = \frac{9}{4}$	חישוב
מ.ש.ל. ג			

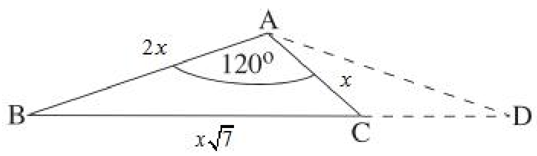
א. $AB = 2AC = 2x$ **(סימון), לכן:** $AC = x$

$\sphericalangle BAC = 120°$ **(נתון).**

נמצא את שטח ΔABC **בשתי דרכים ונשווה אותם, על מנת להביע את** x **באמצעות** h **.**

$\underline{\Delta ABC}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\sphericalangle BAC$$
$$(BC)^2 = (2x)^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \cos 120°$$
$$(BC)^2 = 4x^2 + x^2 + 2x^2$$
$$(BC)^2 = 7x^2$$
$$\boxed{BC = x\sqrt{7}} \quad \leftarrow BC > 0$$



$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot h}{2}$$
$$\boxed{S_{\Delta ABC} = xh\frac{\sqrt{7}}{2}}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin\sphericalangle BAC}{2}$$
$$S_{\Delta ABC} = \frac{2x \cdot x \cdot \sin 120°}{2}$$
$$\boxed{S_{\Delta ABC} = x^2\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$xh\frac{\sqrt{7}}{2} = x^2\frac{\sqrt{3}}{2} \quad / : \frac{x\sqrt{3}}{2} > 0$$
$$\boxed{h\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = x}$$
$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot h\frac{\sqrt{7}}{2}$$
$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{7h^2}{2\sqrt{3}}}$$

תשובה: $S_{\Delta ABC} = \frac{7h^2}{2\sqrt{3}}$ **.**

ב. רדיוס המעגל החוסם את ΔABC **שווה לרדיוס המעגל החוסם את** ΔADC **: נסמנו ב-** R **.**

$\underline{\Delta ABC}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{BC}{\sin 120°} = 2R$$

$\underline{\Delta ADC}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$\frac{AC}{\sin\sphericalangle D} = 2R$$

על פי כלל המעבר נקבל:

$$\frac{AC}{\sin\sphericalangle D} = \frac{BC}{\sin 120°}$$
$$\frac{x\sin 120°}{x\sqrt{7}} = \sin\sphericalangle D$$
$$\boxed{\sphericalangle D = 19.11°}$$

תשובה: $\sphericalangle ADC = 19.11°$ **.**

ג. נתון $AD = h+6$ **.**

$\underline{\Delta ABC}$ **לפי משפט הסינוסים**

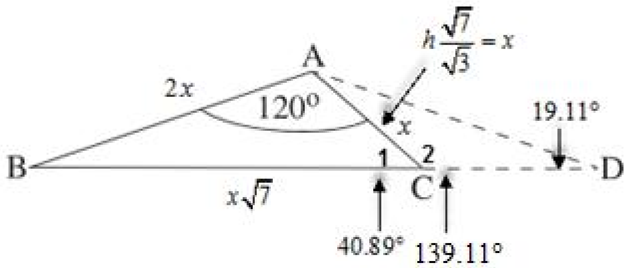
$$\frac{AB}{\sin\sphericalangle C_1} = \frac{BC}{\sin 120^\circ}$$

$$\frac{2x\sin 120^\circ}{x\sqrt{7}} = \sin\sphericalangle C_1$$

$$\sphericalangle C_1 = 40.89^\circ \quad \leftarrow < 0 < \sphericalangle C_1 < 60^\circ$$

$$\sphericalangle C_2 = 139.11^\circ \leftarrow \sphericalangle C_1 + \sphericalangle C_2 = 180^\circ$$

$\underline{\Delta ADC}$ **לפי משפט הסינוסים**



$$\frac{AD}{\sin 139.11^\circ} = \frac{AC}{\sin 19.11^\circ}$$

$$h+6 = \frac{h\sqrt{7}\sin 139.11^\circ}{\sqrt{3}\sin 19.11^\circ}$$

$$h+6 = 3.054h$$

$$6 = 2.054h$$

$$\boxed{h = 2.921}$$

תשובה: $h = 2.921$ **.**

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{a}{\sin x}-a\sin x$ **בתחום** $-® \le x \le ®$ **,** $a>0$ **פרמטר.**

פונקציית $\sin x$ **מתאפסת עבור** $x=®k$ **, ולכן תחום ההגדרה של** $f(x)$ **הוא** $-® < x < ®\,,\, x \neq 0$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה הוא $-® < x < ®\,,\, x \neq 0$ **.**

ב. האסימפטוטות האנכיות של $f(x)$ **הן** $x=-®\,,\, x=0\,,\, x=®$ **.**

ג. נראה ש- $f(x)$ **היא אי-זוגית, כלומר סימטרית לראשית הצירים (למרות שנקודה זו *לא* על גרף הפונקציה).**

$$f(-x)=\frac{a}{\sin(-x)}-a\sin(-x)$$

$$f(-x)=\frac{a}{-\sin x}+a\sin x$$

$$f(-x)=-(\frac{a}{\sin(-x)}-a\sin(-x))$$

$$f(-x)=-f(x)$$

תשובה: $f(x)$ **היא אי-זוגית.**

ד. נמצא נקודות קיצון פנימיות (אין נקודות קצה):

$$f(x)=\frac{a}{\sin x}-a\sin x$$

$$f'(x)=-\frac{a\cos x}{\sin^2 x}-a\cos x$$

$$f'(x)=\frac{-a\cos x-a\cos x\sin^2 x}{\sin^2 x}$$

$$\boxed{f'(x)=a\cdot\frac{-\cos x(1+\sin^2 x)}{\sin^2 x}}$$

$a>0$ **, ולכן סימן הנגזרת נקבע על פי הביטוי** $-\cos x$ **(שאר הביטויים חיוביים בתחום ההגדרה של הפונקציה).**

$$0=-\cos x$$

$$\cos x=0$$

$$x=\frac{®}{2}+®k$$

$$k=0: \quad x=\frac{®}{2} \quad \to f(\frac{®}{2})=\frac{a}{\sin(\frac{®}{2})}-a\sin(\frac{®}{2})=0$$

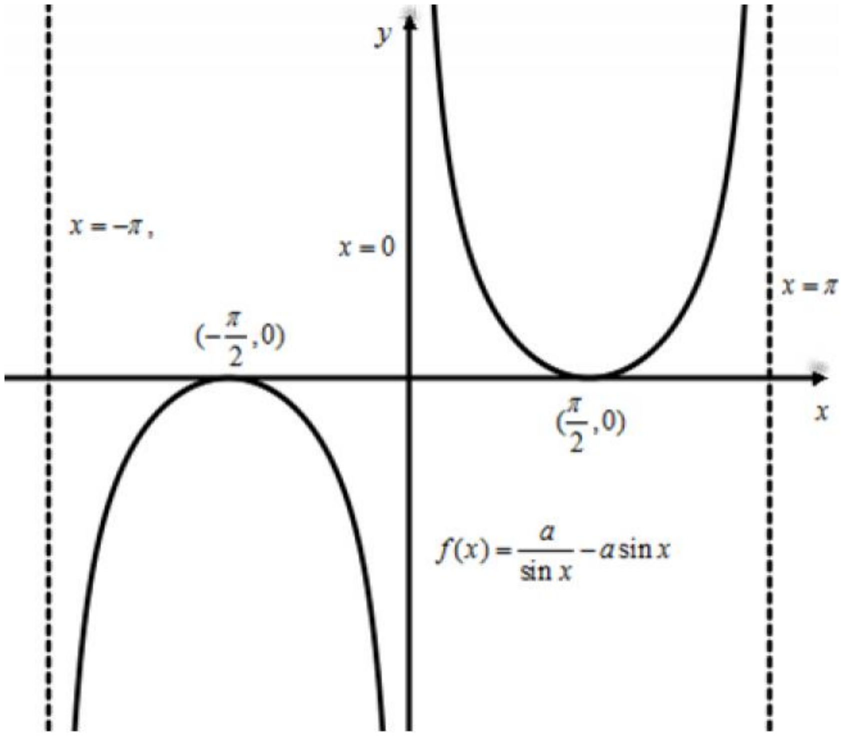
$$k=-1: \quad x=-\frac{®}{2} \quad \to f(\frac{®}{2})=\frac{a}{\sin(-\frac{®}{2})}-a\sin(-\frac{®}{2})=0$$

$$\left.\begin{array}{l} -\cos(\frac{\pi}{4}) < 0 \\ -\cos(\frac{3\pi}{4}) > 0 \end{array}\right\} \boxed{(\frac{\pi}{2},0)\ \min}$$

ועקב אי-הזוגיות של הפונקציה, $\min$ $(-\frac{\pi}{2},0)$ **מקסימום.**

תשובה: $(\frac{\pi}{2},0)$ **מינימום,** $(-\frac{\pi}{2},0)$ **מקסימום.**

ה. סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ **.** $f(x)=\frac{a}{\sin x}-a\sin x$ $(\frac{\pi}{2},0)$ $(-\frac{\pi}{2},0)$ x y



ו. נתונה הפונקציה: $g(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$ **בתחום** $-\pi < x < \pi$ **.**

על פי הסקיצה בסעיף ה - $f(x)$ **אי-שלילית בתחום זה (מתאפסת רק עבור** $x=\frac{\pi}{2}$ **, חיובית בשאר בתחום).**

$\sin x$ **חיובית בכל בתחום** $-\pi < x < \pi$ **.**

לכן המנה $g(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$ **היא אי-שלילית בתחום** $-\pi < x < \pi$ **.**

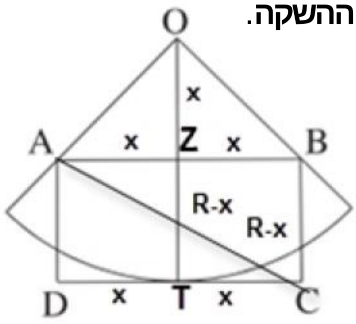
תשובה: הוכַח.

הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא *אורך אלכסון המלבן*.

הגזרה הנתונה היא של רבע עיגול, שרדיוסו R, ולכן $\sphericalangle O = 90°$.

$DT = CT = x$ (נתון וסימון).

התיכון OT *לצלע* DC הוא גם גובה ב- ΔDOC, כי הוא מאונך *למשיק* בנקודת ההשקה.



מכאן ש- OZ *מאונך ל-* AB ומתקבלים שני מלבנים $AZTD$ ו- $BZTC$,

כאשר $AZ = ZB = x$ ו- OZ הוא תיכון *ליתר* ב- ΔAOB.

התיכון ליתר שווה למחצית היתר.

לכן: $OZ = x$ ומכאן ש- $ZT = R - x$ וגם $BC = R - x$.

$AC = \sqrt{(R-x)^2 + (2x)^2}$ (משפט פיתגורס ΔABC).

$$AC = \sqrt{(R-x)^2 + 4x^2}$$
$$AC = \sqrt{R^2 - 2Rx + x^2 + 4x^2}$$
$$\boxed{AC = \sqrt{R^2 - 2Rx + 5x^2}}$$

נמצא את נקודת הקיצון

$$\boxed{(AC)'(x) = \frac{-2R + 10x}{2\sqrt{R^2 - 2Rx + 5x^2}}}$$
$$0 = -2R + 10x$$
$$x = 0.2R$$
$$\left.\begin{aligned} (AC)'(0.1R) &= \frac{-2R + 10\cdot 0.1R}{+} = \frac{-}{+} < 0 \\ (AC)'(0.3R) &= \frac{-2R + 10\cdot 0.3R}{+} = \frac{-}{+} > 0 \end{aligned}\right\} x = 0.2R, Min$$

נציב $0.2R$ בביטוי של האלכסון ונקבל את אורך האלכסון הקצר ביותר.

$$AC = \sqrt{R^2 - 2R\cdot 0.2R + 5\cdot(0.2R)^2}$$
$$AC = \sqrt{R^2 - 0.4R^2 + 5\cdot 0.04R^2}$$
$$AC = \sqrt{\frac{4}{5}R^2}$$
$$\boxed{AC = 2R\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

תשובה: אורך האלכסון הקצר ביותר הוא $2R\frac{\sqrt{5}}{5}$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}$

נביע את שיפוע הפונקציה בנקודה, שבה $x=0$ **, בשתי דרכים,**
ונשווה בין הביטויים על מנת למצוא את ערך הפרמטר a **.**

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+a}-\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+a}}}{x^2+a}$$

$$f'(0)=\frac{\sqrt{a}-0}{a}$$

$$\boxed{f'(0)=\frac{1}{\sqrt{a}}}$$

נקודת ההשקה היא $(0,0)$ **, והמשיק עובר גם בנקודה** $(3,1)$ **, ובהתאם:** $m=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$ **.**

לכן $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{3}$ **ו-** $a=9$ **.**

תשובה: $a=9$ **.**

לכן הפונקציה עולה לכל x **(קל לראות שהפונקציה מוגדרת לכל** x **)**

ב. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ **. הביטוי שבתוך השורש חיובי לכל** x **, ולכן הפונקציה מוגדרת לכל** x **.**

תשובה: תחום ההגדרה: כל x **.**

ג. נכין את הנגזרת הפנימית של הביטוי שבתוך השורש

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx=\int\frac{1}{2\sqrt{x^2+9}}\cdot 2x\,dx=\sqrt{x^2+9}+c$$

משוואת המשיק, העובר בראשית ושיפועו $\frac{1}{3}$ **, היא** $y=\frac{1}{3}x$ **.**

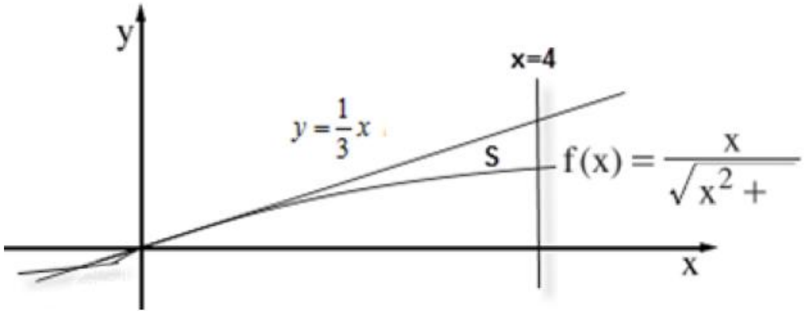
נמצא את גודל השטח המסומן באות S בציור.

$$\int_0^4\left(\frac{1}{3}x-\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx=\frac{x^2}{6}-\sqrt{x^2+9}\Big]_0^4$$

$$=\left(\frac{4^2}{6}-\sqrt{4^2+9}\right)-\left(\frac{0^2}{6}-\sqrt{0^2+9}\right)$$

$$=\left(2\frac{2}{3}-5\right)-(-3)=-2\frac{1}{3}+3=\frac{2}{3}$$

תשובה: השטח המוגבל הוא $\frac{2}{3}$ **יח"ר.**



ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת לכל x: $g''(x)=f(x)$, $g'(0)=5$.

למציאת תחומי עלייה וירידה של $g(x)$, נמצא את $g(x)$ - הפונקציה הקדומה של $g(x)$.

כפי שראינו, בסעיף הקודם, $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx=\sqrt{x^2+9}+c$.

לכן $g'(x)=\sqrt{x^2+9}+c$ **.**

נציב $g'(0)=5$ **ונקבל:** $5=\sqrt{0^2+9}+c$ **ומכאן ש-** $c=2$ **ו** $g'(x)=\sqrt{x^2+9}+2$ **.**

ביטוי זה חיובי לכל x, וכיוון ש- $g(x)$ **מוגדרת (כמו $f(x)$) לכל x ,**

הרי ש- $g(x)$ **עולה לכל x, ואין לה נקודות קיצון.**

פתרון חלופי –

על פי הסקיצה, או הביטוי $g''(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ **בו המונה קובע את הסימן,**

$g''(x)$ **עוברת משליליות לחיוביות עבור** $x=0$,

ולכן לפונקציה הקדומה שלה $g'(x)$ יש נקודת מינימום כאשר $x=0$ **,**

וזהו גם המינימום המוחלט שלה.

נתון כי $g'(0)=5$ **ולכן הערך המינימלי שלה הוא** 5,

מכאן שהיא חיובית לכל x ומכאן ש- $g(x)$ **עולה לכל x, ואין לה נקודות קיצון.**

תשובה: ל- $g(x)$ **אין נקודות קיצון.**