א. נסמן ב- x **את הזמן הדרוש לפועל** I **לסיים את העבודה, ו ב-** y **את מספר השעות של פועל** II**.**

יש למצוא את היחס $\frac{x}{y}$**. (הערה - יחידות הזמן אינן מוגדרות בסעיף זה.)**

נשים לב שההספק המשותף של שני הפועלים, בזמן שהם עובדים יחדיו הוא $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}$**,**

ופי 1.5 **אם יגביר כל אחד מהם את תפוקתו ב-** 50%**, כלומר** $1.5\cdot\frac{x+y}{xy}$

פועל	זמן	חלק עבודה בשעה (הספק)	חלק עבודה כולל (עבודה)
פועל I	x	$\frac{1}{x}$	1
פועל II	y	$\frac{1}{y}$	1
עבודה משותפת	$\frac{xy}{x+y}$	$\frac{x+y}{xy}$	1
ביחד, עם הספק גדול פי 1.5	$\frac{xy}{1.5(x+y)}$	$\frac{1.5(x+y)}{xy}$	1

נפתור את המשוואה המתאימה: נשים לב לכך שהפרש הזמנים המתואר בשאלה

הוא $\frac{2}{15}$ **מהזמן הדרוש לפועל** I **לסיים את העבודה.**

$$\frac{xy}{x+y}-\frac{xy}{1.5(x+y)}=\frac{2}{15}x \quad /:x>0$$

$$\frac{y}{x+y}-\frac{y}{1.5(x+y)}=\frac{2}{15} \quad /\cdot 15(x+y)$$

$$15y-10y=2(x+y)$$

$$5y=2x+2y$$

$$3y=2x$$

$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{3}{2}}$$

תשובה: היחס הוא $\frac{3}{2}$ **(או** $3:2$**).**

ב. שני הפועלים סיימו את העבודה כולה, בקצב ברגיל, ב- 6 **ימים, כאשר על פי סעיף א** $x=1.5y$**.**

$$\frac{xy}{x+y}=6 \quad \rightarrow \frac{1.5y\cdot y}{1.5y+y}=6 \quad \rightarrow \frac{1.5y^2}{2.5y}=6 \quad \rightarrow y=10 \quad \rightarrow x=15$$

העבודה כולה כוללת הכנת 300 **חלקי חילוף, כאשר פועל** I **מסיים אותה ב-** 15 **ימים.** $300:15=20$**.**

תשובה: פועל I **מכין** 20 **חלקי חילוף בקצב העבודה הרגיל שלו.**

א. 1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$

אגף ימין: $4\cdot 1^3-3\cdot 1^2=1$ **אגף שמאל:** $1^3=1$

אגף שמאל שווה לאגף ימין ולכן הטענה נכונה עבור $n=1$

2. ננית את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $1^3-2^3+3^3-4^3\ldots+(2k-1)^3=4k^3-3k^2$**,**

3. נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$**, לכן צ"ל**

$$\underbrace{1^3-2^3+3^3-4^3\ldots+(2k-1)^3}_{\downarrow}-(2k)^3+(2k+1)^3=4(k+1)^3-3(k+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4k^3-3k^2 \qquad -8k^3+8k^3+12k^2+6k+1=4k^3+12k^2+12k+4-3k^2-6k-3$$

$$\Leftrightarrow 4k^3+9k^2+6k+1=4k^3+9k^2+6k+1$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

4. בדקנו את נכונות הטענה עבור $n=1$**, הראינו שאם הטענה נכונה עבור** $n=k$ **טבעי כלשהו,**

אז היא נכונה עבור $n=k+1$ **לכן, על-פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל** n **טבעי.**

ב. יש לחשב את הסכום $1^3-2^3+3^3+\ldots-52^3$

על פי הטענה שהוכחה בסעיף א, עבור $n=26$**,** $1^3-2^3+3^3+\ldots+51^3=4\cdot 25^3-3\cdot 25^2=68,276$

ולכן $1^3-2^3+3^3+\ldots-52^3=68276-52^3=-72,332$ **.**

תשובה: הסכום הוא $-72,332$ **.**

ג. יש להביע את הסכום $1^3-2^3+3^3+\ldots+(4n-1)^3$

על פי הטענה שהוכחה בסעיף א, עבור $n=2n$**,**

$$1^3-2^3+3^3+\ldots+(4n-1)^3=4\cdot(2n)^3-3\cdot(2n)^2=32n^3-12n^2$$

תשובה: הסכום הוא $32n^3-12n^2$ **.**

א. נתונה הפונקציה: $g(x)=\sin(\frac{2\pi}{3}-x)$ **בתחום** $0\le x\le\frac{7}{3}\pi$.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **, כלומר** $g(0)=\sin(\frac{2\pi}{3}-0)=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow\boxed{(0,\frac{\sqrt{3}}{2})}$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **,**

$$0=\sin(\frac{2\pi}{3}-x)\rightarrow\frac{2\pi}{3}-x=\pi k\rightarrow x=\frac{2\pi}{3}+\pi k$$

עבור $k=0$ **נקבל** $x=\frac{2\pi}{3}$ **, ועבור** $k=1$ **נקבל** $x=\frac{5\pi}{3}$.

תשובה: $(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$**,** $(\frac{2\pi}{3},0)$ **,** $(\frac{5\pi}{3},0)$.

ב. נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ **עם גרף הפונקציה** $f(x)=\sin x$ **:**

$$\sin(\frac{2\pi}{3}-x)=\sin x$$

$\frac{2\pi}{3}-x=x+2\pi k$	$\frac{2\pi}{3}-x=\pi-x+2\pi k$
$x=\frac{\pi}{3}+\pi k$	$\varnothing$

עבור $k=0$ **נקבל** $x=\frac{\pi}{3}$ **, ובהתאם** $y=\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow\boxed{(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})}$.

עבור $k=1$ **נקבל** $x=\frac{4\pi}{3}$ **, ובהתאם** $y=\sin(\frac{4\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow\boxed{(\frac{4\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})}$.

עבור $k=2$ **נקבל** $x=\frac{7\pi}{3}$ **, ובהתאם** $y=\sin(\frac{7\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow\boxed{(\frac{7\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})}$.

תשובה: $(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$ **,** $(\frac{4\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$ **,** $(\frac{7\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

ג. (1) הפונקציה שיש להביא ל*מקסימום* היא *אורך הקטע* AB

(A על הגרף של $g(x)$ ו- B על הגרף של $f(x)$).

על-מנת לא להסתבך עם ציור (די קשה בתרגיל זה),

נבין כי אורך הקטע AB , המקביל לציר ה- y , הוא $|y_A - y_B|$,

ולמעשה נבנה פונקציה חדשה $l(x) = \sin(\frac{2\pi}{3} - x) - \sin x$,

ואם ערכיה יהיו שליליים, הרי זה נובע מכך שעבור אותו ערך x מתקבל ש- $y_B > y_A$.

ערכי הפונקציה בקצוות: $l(0) = \sin(\frac{2\pi}{3} - 0) - \sin 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $l(\frac{7\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{7\pi}{3}) - \sin\frac{7\pi}{3} = 0$

וכמובן גם $l(\frac{\pi}{3}) = l(\frac{4\pi}{3}) = l(\frac{7\pi}{3}) = 0$ **כי אלו שיעורי ה- x של נקודות החיתוך בין הפונקציות.**

נמצא את נקודות הקיצון המוחלטות.

$$l'(x) = -\cos(\frac{2\pi}{3} - x) - \cos x$$

$$0 = -\cos(\frac{2\pi}{3} - x) - \cos x$$

$$\cos(\frac{2\pi}{3} - x) = -\cos x$$

$$\cos(\frac{2\pi}{3} - x) = \cos(\pi - x)$$

$$\frac{2\pi}{3} - x = \pi - x + 2\pi k \qquad \frac{2\pi}{3} - x = x - \pi + 2\pi k$$

$$\varnothing \qquad x = \frac{5\pi}{6} + \pi k$$

עבור $k = 0$ **נקבל** $x = \frac{5\pi}{6}$ **, ובהתאם** $l(\frac{5\pi}{6}) = \sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}) - \sin\frac{5\pi}{6} = -1$ **.**

עבור $k = 1$ **נקבל** $x = \frac{11\pi}{6}$ **, ובהתאם** $l(\frac{11\pi}{6}) = \sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}) - \sin\frac{11\pi}{6} = 1$ **.**

כיוון ש- $-1 < 0, \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ **, הרי שערכי הקיצון המוחלט הם 1 ו- -1 (כאשר, כאמור, $y_B > y_A$ עבור -1)**

בהתאם האורך המקסימלי הוא 1 והוא מתקבל בשתי נקודות, עבור $x = \frac{5\pi}{6}$ **ועבור** $x = \frac{11\pi}{6}$ **,**

בראשונה: $y_A > y_B$ **, כלומר הגרף של** $g(x)$ **מעל לגרף של** $f(x)$ **($\frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} < \frac{4\pi}{3}$).**

בשנייה: $y_A < y_B$ **, כלומר הגרף של** $g(x)$ **מתחת לגרף של** $f(x)$ **($\frac{4}{3} < \frac{11\pi}{6} < \frac{7\pi}{3}$).**

תשובה: האורך המקסימלי של הקטע AB הוא 1.

(2) שני קטעים, שבהם $x = \frac{5\pi}{6}$ **או** $x = \frac{11\pi}{6}$ **.**

א. נתונות שתי פונקציות $g(x)=-x^2+c$, $f(x)=x^2+4x+b$ **(**$b,c>0$**).**

בנקודת ההשקה P **, בה עובר המשיק המשותף, שווים הן ערכי הפונקציות והן ערכי הנגזרות.**

$$f'(x)=g'(x)$$
$$-2x+4=-2x \quad \to 4x=-4 \quad \to x=-1$$
$$\left.\begin{matrix} f(-1)=(-1)^2+4(-1)+b=b-3 \\ g(-1)=-(-1)^2+c=c-1 \end{matrix}\right\} c-1=b-3 \quad \to c=b-2$$
$$\boxed{\mathrm{P}(-1,b-3)}$$

תשובה: $\mathrm{P}(-1,b-3)$ **(ומעתה והלאה** $g(x)=-x^2+b-2$ **)**

ב. כיוון שנתון $b>4$ **, הרי ששיעור ה-** y **של** P **חיובי**

וכן שלפרבולה $f(x)=x^2+4x+b$ **אין נקודות חיתוך עם ציר ה-** x **כי** $\Delta=16-4b^2<0$ **.**

לפרבולה $g(x)=-x^2+c$ **יש מקסימום ושתי נקודות חיתוך עם ציר ה-** x **, כי** $c=b-4>0$

בנקודת ההשקה P **, בה עובר המשיק המשותף, שווים הן ערכי הפונקציות והן ערכי הנגזרות.**

תשובה :משמאל הסרטוט המתאים כולל סימונים עבור הסעיפים הבאים.

ג. נמצא את משוואת המשיק בנקודה $\mathrm{P}(-1,b-3)$

שיפוע המשיק $g'(-1)=-2\cdot(-1)=2$

משוואת המשיק $y-(b-3)=2(x+1) \quad \to y=2x+b-1$ $y=2x+b-1$

נעביר ישר $x=a$ **(בציור עבור** $a>0$ **, אך אין לכך משמעות)**

שיעורי הנקודה $\mathrm{D}(a,2a+b-1)$

שיעורי הנקודה $\mathrm{A}(a,a^2+4a+b)$ **, ושיעורי הנקודה** $\mathrm{B}(a,-a^2+b-2)$

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{AD}=y_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{D}}=a^2+4a+b-(2a+b-1)=a^2+2a+1 \\ \mathrm{DB}=y_{\mathrm{D}}-y_{\mathrm{B}}=2a+b-1-(-a^2+b-2)=a^2+2a+1 \end{matrix}\right\} \mathrm{AD}=\mathrm{DB}$$

תשובה: PD **תיכון במשולש** PAB **, כי** $\mathrm{AD}=\mathrm{DB}$ **.**

ד. כל השטח S **(צבוע כולו בצהוב) הוא בין הפונקציות** $f(x)$ **מעל והמשיק מתחת.**

הפרש הפונקציות הוא $x^2+4x+b-(2x+b-1)=x^2+2x+1$

ולכן $S=\int_{-a}^{a}(x^2+2x+1)\,dx$

השטח המבוקש הוא השטח הצהוב והאדום ביחד.

הפרש הפונקציות: $x^2+4x+b-(-x^2+b-2)=2x^2+4x+2=2(x^2+2x+1)$

ולכן $S_{new}=\int_{-a}^{a}2(x^2+2x+1)\,dx=2\int_{-a}^{a}(x^2+2x+1)\,dx=2S$

תשובה: הוכח.

א. O **מרכז מעגל חסום – מפגש חוצי זוויות**

יש למצוא את היחס $\frac{AE}{CF}$.

<u>תכנון</u>: נסמן $CF=x$. **נמצא את** AC **ב-** ΔCAF **ולאחר מכן את** AE **ב-** ΔCAE.

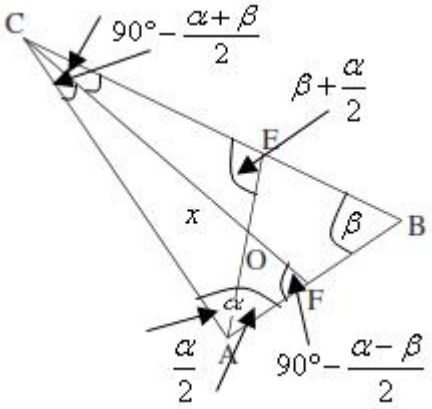
$\sphericalangle BAC=\sim$ **(נתון) ובהתאם**

$\sphericalangle ABC=$ **(נתון)**

$\sphericalangle BCA=180^\circ-(\sim+\ )$ **(סכום זוויות ב-** ΔABC **הוא** 180°**), ובהתאם** $\sphericalangle ACF=\sphericalangle BCF=90^\circ-\frac{\sim+\ }{2}$.

$\sphericalangle CEA=\ +\frac{\sim}{2}$ **(זווית חיצונית ל-** ΔAEB **שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שלא צמודות לה)**

$\sphericalangle CFA=90^\circ-\frac{\sim-\ }{2}$ **(סכום זוויות ב-** ΔCAF **הוא** 180°**)**



נמצא את AC **ב-** ΔCAF **באמצעות משפט הסינוסים**

$$\frac{AC}{\sin(90^\circ-\frac{\sim-\ }{2})}=\frac{CF}{\sin\sim}$$

$$\boxed{AC=\frac{x\cos(\frac{\sim-\ }{2})}{\sin\sim}}$$

נמצא את AE **ב-** ΔCAE **באמצעות משפט הסינוסים**

$$\frac{AE}{\sin(180^\circ-(\sim+\ ))}=\frac{AC}{\sin(\ +\frac{\sim}{2})}$$

$$\boxed{AE=\frac{x\cos(\frac{\sim-\ }{2})\sin(\sim+\ )}{\sin\sim\ \sin(\ +\frac{\sim}{2})}}$$

וביחס המבוקש x **יצטמצם.**

תשובה: $\frac{AE}{CF}=\frac{\cos(\frac{\sim-\ }{2})\sin(\sim+\ )}{\sin\sim\ \sin(\ +\frac{\sim}{2})}$

ב. נתון גם $\frac{AE}{CF}=\frac{1}{2}$, $=60°$.

יש להראות כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACB **שווה ל-** $\frac{1}{2}BC$ **,**

כלומר שהצלע BC **היא הקוטר, ולכן יש להראות ש-** $\sim=90°$ **.**

$$\frac{1}{2}=\frac{\cos(\frac{\sim-60°}{2})\sin(\sim+60°)}{\sin\sim\ \sin(60°+\frac{\sim}{2})}$$

לפנינו ארבעה גורמים במנה ויש להימנע ככל האפשר משימוש בנוסחאות של $\sin(\sim+\ ),\cos(\sim+\ )$ **או מנוסחאות המעבר של** $\sin\sim\sin$ **ו-** $\sin\sim\cos$ **,**

לכן יש צורך למצוא צמצום אפשרי.

$$\sin(60°+\frac{\sim}{2})=\cos(90°-(60°+\frac{\sim}{2}))=\cos(30°-\frac{\sim}{2})=\cos(\frac{\sim}{2}-30°)$$

$$\frac{1}{2}=\frac{\sin(\sim+60°)}{\sin\sim}$$

$$\sin\sim=2\sin(\sim+60°)$$

$$\sin\sim=2(\sin\sim\cos60°+\cos\sim\sin60°)$$

$$\sin\sim=\sin\sim+\sqrt{3}\cos\sim$$

$$\cos\sim=0$$

$$\boxed{\sim=90°}$$

ולכן, כפי שהוסבר בתחילת הסעיף, רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACB **שווה ל-** $\frac{1}{2}BC$ **.**

תשובה: הוכַח.