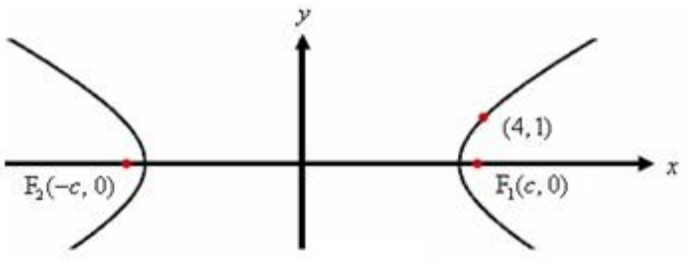
א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:



הנקודה $(4,1)$ **נמצאת על ההיפרבולה** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,

ולכן $\frac{16}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$.

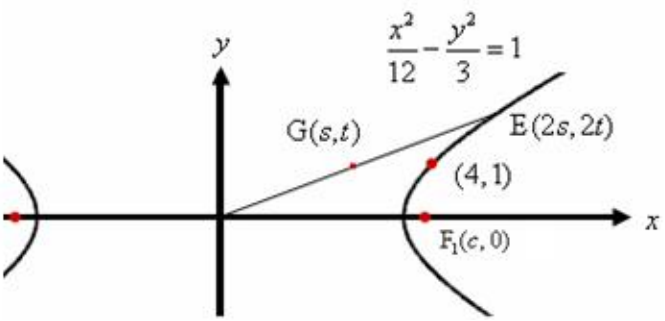
המרחק בין מוקדי ההיפרבולה $F_1(c,0), F_2(-c,0)$

הוא $2\sqrt{15}$. **ולכן** $2c=2\sqrt{15}\rightarrow c^2=15$.

בהיפרבולה $a^2+b^2=c^2$ **ובהתאם:**

$$\frac{16}{15-b^2}-\frac{1}{b^2}=1$$
$$16b^2-(15-b^2)=b^2(15-b^2)$$
$$b^4+2b^2-15=0$$
$$(b^2+5)(b^2-3)=0$$
$$\rightarrow b^2=3,\ a^2=12$$

ומשוואת ההיפרבולה הנתונה היא $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$



נסמן $G(s,t)$ **- נקודה על המקום הגיאומטרי.**

ע"פ נוסחת אמצע קטע

$$\left.\begin{array}{ll} s=\frac{0+x_E}{2} & \rightarrow x_E=2s \\ t=\frac{0+y_E}{2} & \rightarrow y_E=2t \end{array}\right\} \boxed{E(2s,2t)}$$

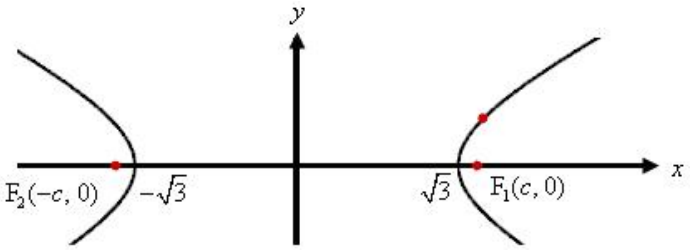
נציב שיעורי הנקודה $E(2s,2t)$ **במשוואת ההיפרבולה**

$$\frac{(2s)^2}{12}-\frac{(2t)^2}{3}=1$$
$$\frac{s^2}{3}-\frac{4t^2}{3}=1$$

וזאת משוואת היפרבולה $\boxed{\frac{x^2}{3}-\frac{4y^2}{3}=1}$

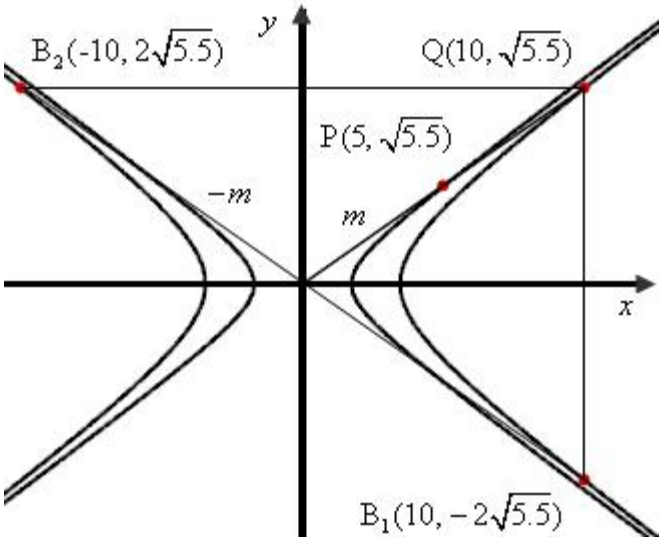
תשובה: $\frac{x^2}{3}-\frac{4y^2}{3}=1$

ב. ההיפרבולה <u>אינה</u> מוגדרת עבור $-a < x < a$**,**
כלומר בין קדקודי ההיפרבולה
תשובה: $x \ge \sqrt{3}$ **או** $x \le -\sqrt{3}$



ג. נתון כי שיפוע הקטע BO **הוא** $-m = -m_{PO}$**.**
כיוון ש- $P(5, \sqrt{5.5})$ **על המקום הגיאומטרי שמצאנו,**
הרי $Q(10, \sqrt{5.5})$ **תהייה נקודה על ההיפרבולה הנתונה,**
כאשר ראשית הצירים היא אמצע הקטע QP**.**
עקב תכונות הסימטריה של ההיפרבולה,
והעובדה שהשיפועים הנתונים שווים בערכם המוחלט,
הרי שהנקודות המבוקשות הן:

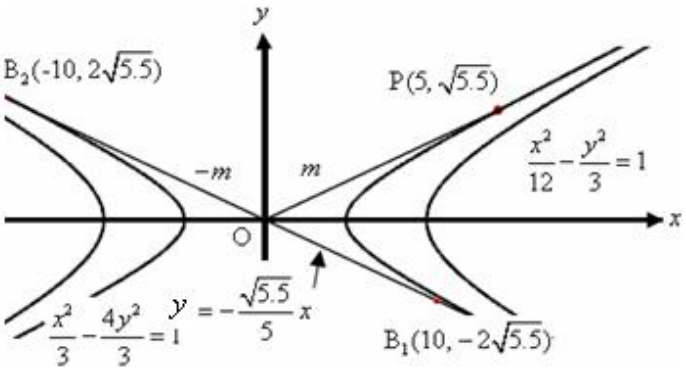
$$B_1(10, -2\sqrt{5.5}), \quad B_2(-10, 2\sqrt{5.5})$$



אפשר גם:

$$m = m_{PO} = \frac{\sqrt{5.5} - 0}{5 - 0} = \frac{\sqrt{5.5}}{5} \quad \rightarrow m_{BO} = -\frac{\sqrt{5.5}}{5}$$

ומשוואת הישר העובר בראשית $OB \equiv y = -\frac{\sqrt{5.5}}{5}x$



נמצא את שיעורי נקודת החיתוך B **בין הישר להיפרבולה:**

$$\frac{x^2}{12} - \frac{(-\frac{\sqrt{5.5}}{5}x)^2}{3} = 1$$

$$x^2 - 0.88x^2 = 12$$

$$0.12x^2 = 12$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \pm 10$$

$$\boxed{B_1(10, -2\sqrt{5.5}), \quad B_2(-10, 2\sqrt{5.5})}$$

תשובה: $B_1(10, -2\sqrt{5.5}), \quad B_2(-10, 2\sqrt{5.5})$

א. נציג את השרטוט המתאים ונסביר בהמשך:

(1) שיפוע השוק AC **שמשוואתה** $y=x+2$ **הוא** 1,

ושיפוע הבסיס BC **המקביל לקטע האמצעים הוא** -0.5.

נסמן את זווית C **עם כיוון השעון ונקבל**

$$\tan\angle C=\frac{1-(-0.5)}{1+1\cdot(-0.5)}=3$$

זוויות הבסיס שוות במש"ש, $\tan\angle C=\tan\angle B$ **ובהתאם:**

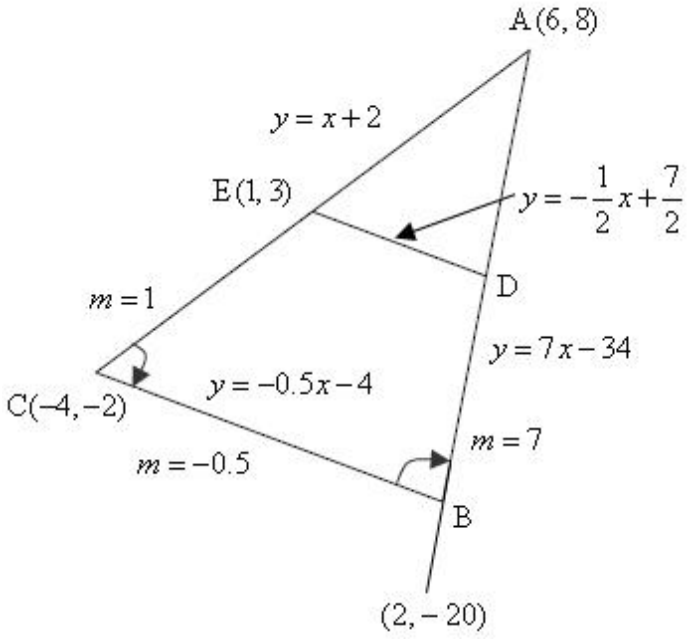
$$3=\frac{-0.5-m_{AB}}{1+(-0.5)\cdot m_{AB}}$$

$$3-1.5m_{AB}=-0.5-m_{AB}$$

$$\boxed{m_{AB}=7}$$

תשובה: $m_{AB}=7$

(2) משוואת השוק: $AB\equiv y+20=7(x-2)\equiv y=7x-34$



נמצא את שיעורי הקדקוד A

$$\begin{cases}y=x+2\\ y=7x-34\end{cases}\rightarrow x+2=7x-34$$

$$-6x=-36\rightarrow A(6,8)$$

נמצא את שיעורי הנקודה E

$$\begin{cases}y=x+2\\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\end{cases}\rightarrow x+2=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

$$1.5x=1.5\rightarrow E(1,3)$$

ע"פ נוסחת אמצע קטע

$$\left.\begin{aligned}1&=\frac{6+x_C}{2}\quad\rightarrow x_C=-4\\ 3&=\frac{8+y_C}{2}\quad\rightarrow y_C=-2\end{aligned}\right\}C(-4,-2)$$

משוואת הבסיס:

$$BC\equiv y+2=-0.5(x+4)\equiv y=-0.5x-4$$

תשובה: $y=-0.5x-4$

ג. דרך הנקודות B **ו-** C **עובר מעגל שמרכזו** $M(2,y)$.

האנך האמצעי מהמיתר עובר דרך מרכז המעגל. כיוון שהמשולש שווה שוקיים,

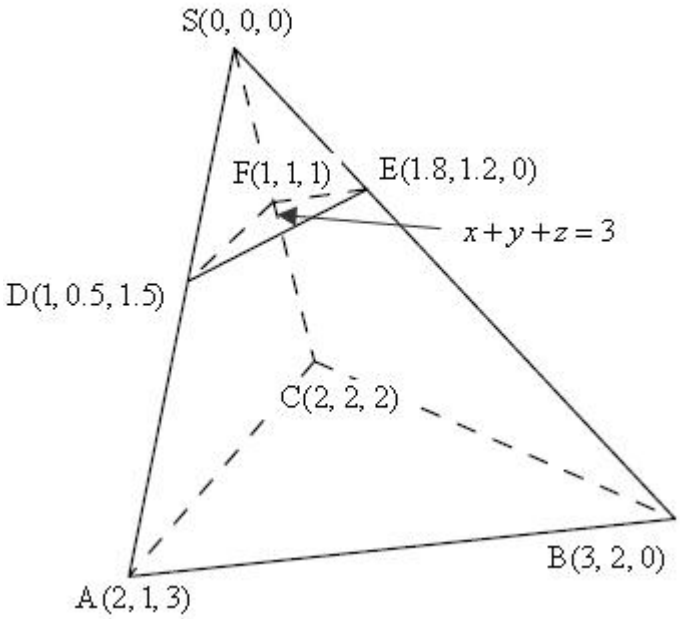
האנך האמצעי עובר דרך הנקודה A **. שיפוע האנך האמצעי הופכי ונגדי לשיפוע הבסיס:** 2 .

$$2=\frac{8-y_M}{6-2}\quad\rightarrow\boxed{y_M=0}$$

תשובה: $y_M=0$

א. נמצא את שיעורי הנקודה F **באמצעות נוסחת אמצע קטע** SC **:**

$$F(\frac{0+2}{2},\frac{0+2}{2},\frac{0+2}{2}) = F(1,1,1)$$



הווקטור $\overrightarrow{SC}$ **יהיה הנורמל של המישור**

המאונך למקצוע SC

$$\overrightarrow{SC} = \underline{C} - \underline{S} = \underline{x}(2,2,2) = \underline{x}(1,1,1)$$

ובהתאם משוואת המישור המבוקש: $x+y+z+D=0$

נציב את שיעורי הנקודה F **:** $1+1+1+D=0 \rightarrow = D=-3$

תשובה: משוואת המישור המאונך $x+y+z=3$

ב. המקצועות SB **ו-** SA **עוברים בראשית הצירים,**

ובהתאם נקודה טיפוסית על SB **היא** $(3t, 2t, 0)$

ונקודה טיפוסית על SA **היא** $(2r, r, 3r)$

נציב $(3t, 2t, 0)$ **במשוואת המישור למציאת שיעורי** E

$$3t+2t=3 \quad \rightarrow t=0.6 \quad \rightarrow E(1.8, 1.2, 0)$$

נציב $(2r, r, 3r)$ **במשוואת המישור למציאת שיעורי** D

$$2r+r+3r=3 \quad \rightarrow r=0.5 \quad \rightarrow D(1, 0.5, 1.5)$$

נמצא את שטח משולש ΔDFE

$$\overrightarrow{FD} = \underline{D} - \underline{F} = \underline{x} = (0, -0.5, 0.5)$$

$$\overrightarrow{FE} = \underline{E} - \underline{F} = \underline{x} = (0.8, 0.2, -1)$$

$$\left|\overrightarrow{FD}\right| = \sqrt{0^2 + 0.5^2 + 0.5^2} = \sqrt{0.5}$$

$$\left|\overrightarrow{FE}\right| = \sqrt{0.8^2 + 0.2^2 + 1^2} = \sqrt{1.68}$$

$$\cos\angle DFE = \frac{(0,-0.5,0.5)(0.8,0.2,-1)}{\sqrt{0.5}\sqrt{1.68}} = \frac{0-0.1-0.5}{\sqrt{0.5}\sqrt{1.68}}$$

$$\angle DFE = 130.89°$$

$$S_{\Delta DFE} = \frac{\left|\overrightarrow{FD}\right|\left|\overrightarrow{FE}\right|\sin\angle DFE}{2} = \frac{\sqrt{0.5}\sqrt{1.68}\sin 130.89°}{2} = 0.3464$$

נמצא את גובה הפירמידה, מרחק S **ממישור הבסיס**

$$h = \frac{|0+0+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$V = \frac{0.3464 \cdot \sqrt{3}}{3} = 0.2$$

תשובה: נפח הפירמידה 0.2 **יח"ק.**

(1) אחד מפתרונות המשוואה $(1+i)z^2-kz+4i=0$ **הוא** $z_1=i$

נציב $z_1=i$ **במשוואה ונמצא את** k

$$(1+i)i^2-ki+4i=0$$
$$(1+i)(-1)-ki+4i=0$$
$$-1-i-ki+4i=0$$
$$-ki=1-3i$$
$$k=\frac{1-3i}{-i}=\frac{(1-3i)i}{-i\cdot i}$$
$$\boxed{k=3+i}$$

תשובה: $k=3+i$

(2) נציב $k=3+i$ **במשוואה ונמצא את** Δ **, כהכנה למשוואה הריבועית:**

$$(1+i)z^2-(3+i)z+4i=0$$
$$\Delta=(3+i)^2-16i(1+i)$$
$$\Delta=9+6i-1-16i+16$$
$$\boxed{\Delta=24-10i}$$
$$\tan^{-}=\frac{-10}{24}=-\frac{5}{12}$$
$$^{-}=-22.62°+180°k$$
$$^{-}=337.38° \quad \leftarrow 270°<{}^{-}<360°$$
$$r=\sqrt{24^2+(-10)^2}=26$$
$$\boxed{\Delta=26\,cis337.38°}$$
$$t_i=\sqrt{26}\;cis\frac{337.38°+360°k}{2}$$
$$t_1=\sqrt{26}\;cis\,168.69°=-5+i$$
$$t_2=\sqrt{26}\;cis\,348.69°=5-i$$
$$z_{1,2}=\frac{3+i\pm(-5+i)}{2(1+i)}$$
$$z_1=\frac{3+i-5+i}{2(1+i)}=\frac{-2+2i}{2(1+i)}=\frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{(-1+i+i+1)}{2}=i$$
$$z_2=\frac{3+i+5-i}{2(1+i)}=\frac{8}{2(1+i)}=\frac{4(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{4(1-i)}{2}=2(1-i)=2-2i$$

תשובה: $2-2i$

הערה: ניתן, ואפילו עדיף, לפתור באמצעות נוסחת ויאטה (שלא הייתה במיקוד של הבחינה הזאת)

יש להוכיח כי $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

נסמן $z_1 = r_1\ cis\sim$, $z_2 = r_2\ cis$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{r_1\ cis\sim \cdot r_2\ cis} = \overline{r_1 \cdot r_2 \cdot cis(\sim +)} =$$
$$r_1 \cdot r_2 cis(-\sim -) = r_1 \cdot r_2 \cdot cis(-\sim) \cdot cis(-) =$$
$$r_1 cis(-\sim) \cdot r_2\ cis(-) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=xe^{x^2}$, נמצא את תחומי העלייה והירידה:

$$f(x)=xe^{x^2}$$
$$f'(x)=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}$$
$$\boxed{f'(x)=e^{x^2}(1+2x^2)}$$

כיוון ששני הכופלים חיוביים לכל x הרי שהפונקציה עולה לכל x

תשובה: עלייה – כל x , ירידה – אף x

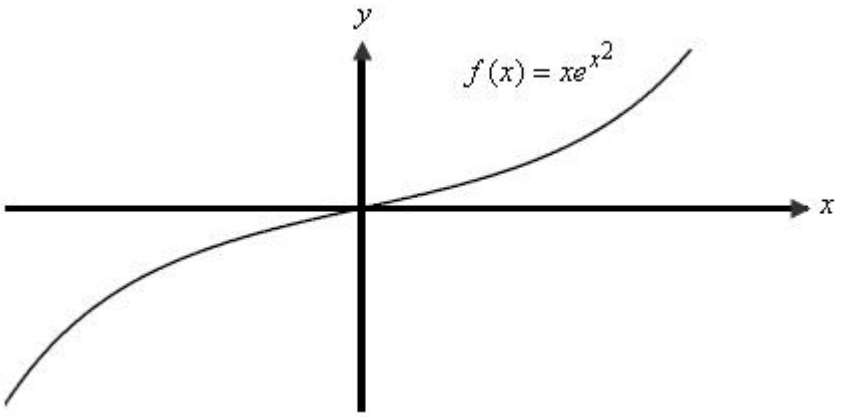
ב. נמצא תחומי הקעירות של הפונקציה כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$:

$$f''(x)=2xe^{x^2}(1+2x^2)+4xe^{x^2}$$
$$f'(x)=xe^{x^2}(2+4x^2+4)$$
$$\boxed{f'(x)=xe^{x^2}(6+4x^2)}$$

הכופל היחידי שיקבע את סימן הנגזרת השנייה הוא x (שני הכופלים האחרים חיוביים לכל x)

תשובה: קעירות כלפי מעלה $\cup$ $x>0$, קעירות כלפי מטה $\cap$ $x<0$

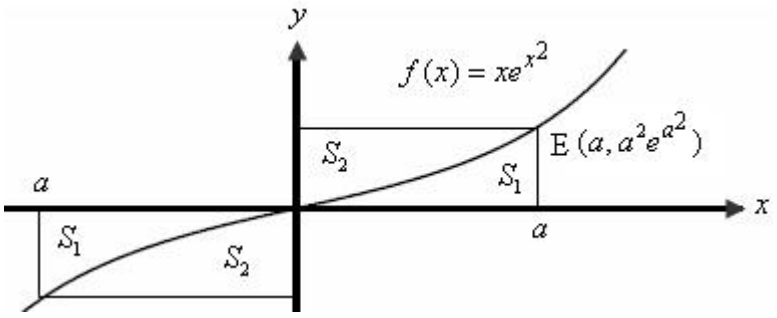
ג. קל לראות שהפונקציה אי-זוגית, ועוברת בראשית הצירים



ד. הישר $x=a$ עובר מימין לציר ה- y עבור $a>0$, או משמאל לציר ה- y עבור $a<0$.

עקב תחומי הקעירות ניתן לראות ש $S_2 > S_1$ בכל מקרה,

כאשר השטחים סימטריים עקב אי הזוגיות של הפונקציה . (<u>הציור מתאים גם לסעיף ה</u>)



על-פי שטח מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. $S_1+S_2=a\cdot ae^{a^2}=a^2e^{a^2}$

נחשב את השטח המבוקש, על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית של e^{x^2}

$$S_1=\int_0^a (xe^{x^2}-0)dx=\int_0^a (\frac{1}{2}e^{x^2}\cdot 2x)dx$$

$$S_1=0.5e^{x^2}\Big]_0^a$$

$$S_1=0.5e^{a^2}-0.5e^{0^2}$$

$$\boxed{S_1=0.5e^{a^2}-0.5}$$

$$S_2=a^2e^{a^2}-(0.5e^{a^2}-0.5)$$

$$\boxed{S_2=(a^2-0.5)e^{a^2}+0.5}$$

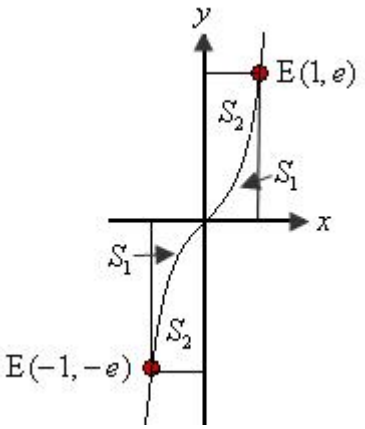
$$(a^2-0.5)e^{a^2}+0.5=0.5e^{a^2}-0.5+1 \quad \leftarrow S_2=S_1+1$$

$$(a^2-0.5)e^{a^2}=0.5e^{a^2}/:e^{a^2}>0$$

$$a^2-0.5=0.5$$

$$a^2=1$$

$$\boxed{a=\pm 1}$$



תשובה: $a=\pm 1$

ה. עבור $a=1$ שיעורי הנקודה $E(1,e)$,

עבור $a=-1$ שיעורי הנקודה $E(-1,-e)$,