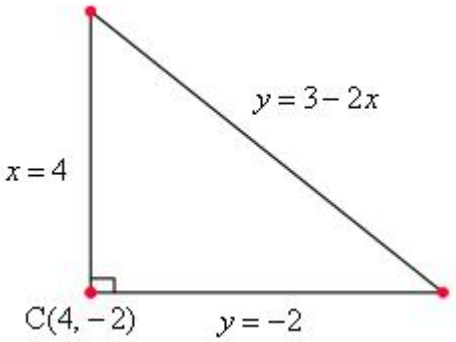
א. נתון כי משולש ABC **ישר זווית,** $\sphericalangle C = 90°$ **,** $C(4,-2)$ **,** $x_A > x_B$ **, ומשוואת היתר היא** $y = 3-2x$ **.**

כמו כן, נתון כי ניצבי המשולש מקבילים לצירים.



נציב $x = 4$ **במשוואת היתר ונקבל** $(4,-5)$ **.**

נציב $y = -2$ **,** $-2 = 3-2x \rightarrow 2x = 5$ **במשוואת היתר ונקבל** $(2.5,-2)$ **.**

כיוון ש $x_A > x_B$ **, הרי ש:** $A(4,-5)$ **ו-** $B(2.5,-2)$ **.**

תשובה: $A(4,-5)$ **ו-** $B(2.5,-2)$ **.**

ב. נתוני השאלה נשארים כפי שהם,

למעט העובדה שניצבי המשולש אינם מקבילים לצירים.

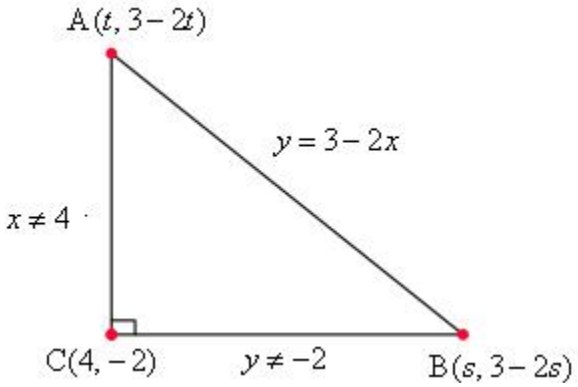
לכן, לא ייתכן מצב שלאחד מהניצבים אין שיפוע, כלומר $x \neq 4$ **(וכמובן** $y \neq -2$ **).**

נפתור בשתי דרכים: (1) משוואת מרחק ומכפלת שיפועים (2) מציאת מרכז מעגל חוסם.

(1) <u>משוואת מרחק ומכפלת שיפועים</u>

נסמן את שני קדקודי יתר המשולש: $A(t, 3-2t)$ **,** $B(s, 3-2s)$ **(**$t > s$**).**

אורך היתר שווה לאורכו במשולש שצלעותיו מקבילות לצירים, שאת קדקודיו מצאנו בסעיף א.



$$(AB)^2 = (4-2.5)^2 + (-5-(-2))^2 = 11.25$$

$$(t-s)^2 + (3-2t-(3-2s))^2 = 11.25$$
$$(t-s)^2 + (2s-2t)^2 = 11.25$$
$$(t-s)^2 + 4(t-s)^2 = 11.25$$
$$5(t-s)^2 = 11.25$$
$$(t-s)^2 = 2.25$$
$$t-s = 1.5$$
$$\cancel{t-s=-1.5} \quad \leftarrow t > s$$

ובהתאם, שני קדקודי יתר המשולש:

$A(t, 3-2t)$ **,** $B(t-1.5, 3-2(t-1.5)) \rightarrow B(t-1.5, 6-2t)$ **(**$t > s$**).**

על פי תנאי ניצבות מכפלת שיפועי הניצבים שווה ל- -1 **.**

$$m_{AC} \cdot m_{BC} = \frac{3-2t-(-2)}{t-4} \cdot \frac{6-2t-(-2)}{t-5.5} = \frac{5-2t}{\cancel{t-4}} \cdot \frac{\overset{-2}{\cancel{8-2t}}}{t-5.5} = -1 \quad / \, t \neq 4$$
$$-10 + 4t = -t + 5.5$$
$$5t = 15.5$$
$$t = 3.1$$

נציב $t = 3.1$ **, בביטויי קדקודי היתר, ונקבל:** $A(3.1,-3.2)$ **ו-** $B(1.6,-0.2)$ **.**

תשובה: $A(3.1,-3.2)$ **,** $B(1.6,-0.2)$ **.**

(2) <u>מרכז מעגל חוסם, או התיכון ליתר שווה למחצית היתר</u>

נסמן את מרכז המעגל החוסם, אמצע היתר, $M(t,3-2t)$.

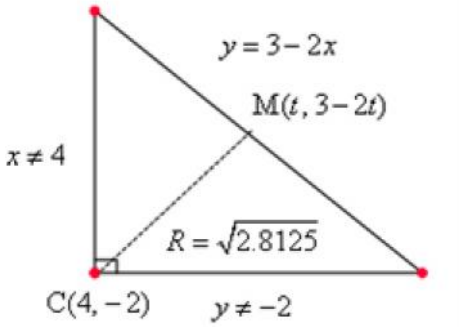
ע"פ נוסחת אמצע קטע, עבור המשולש שצלעותיו מקבילות לצירים: $x=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{4+2.5}{2}=3.25$,

לכן, במקרה זה $t\neq 3.25$.

המרחק בין $M(t,3-2t)$ **לקדקוד** $C(4,-2)$ **שווה לרדיוס המעגל, כלומר לחצי מהקוטר (חצי מהיתר).**

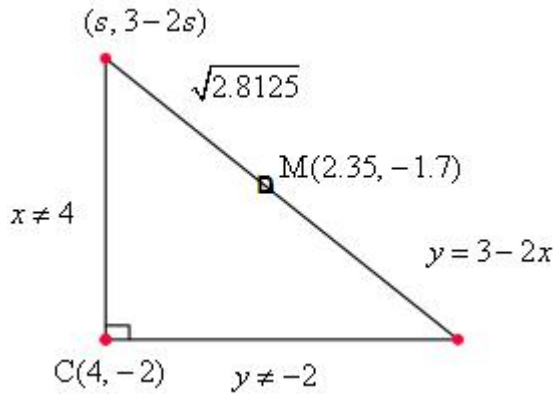
$(AB)^2=(4-2.5)^2+(-5-(-2))^2=11.25$,

כלומר $(MC)^2=(\frac{\sqrt{11.25}}{2})^2=2.8125$



$$(t-4)^2+(3-2t-(-2)^2=2.8125$$
$$(t-4)^2+(5-2t)^2=2.8125$$
$$5t^2-28t+38.1875=0$$
$$t_{1,2}=\frac{-28\pm 4.5}{10}$$
$$\cancel{t=3.25} \quad \leftarrow t\neq 3.25$$
$$t=2.35 \quad \rightarrow M(2.35,-1.7)$$

נציב במשוואת המרחק (או משוואת המעגל), כאשר קדקודי היתר יסומנו $(s,3-2s)$.



$$(s-2.35)^2+(3-2s-(-1.7)^2=2.8125$$
$$(s-2.35)^2+(4.7-2s)^2=2.8125$$
$$(s-2.35)^2+4(2.35-s)^2=2.8125$$
$$5(s-2.35)^2=2.8125$$
$$(s-2.35)^2=0.5625 \quad \rightarrow s-2.35=\pm 0.75$$
$$\left.\begin{array}{l} S_1=3.1 \quad \rightarrow A(3.1,-3.2) \\ S_2=1.6 \quad \rightarrow B(1.6,-0.2) \end{array}\right\} \leftarrow x_A>x_B$$

תשובה: $A(3.1,-3.2)$, $B(1.6,-0.2)$.

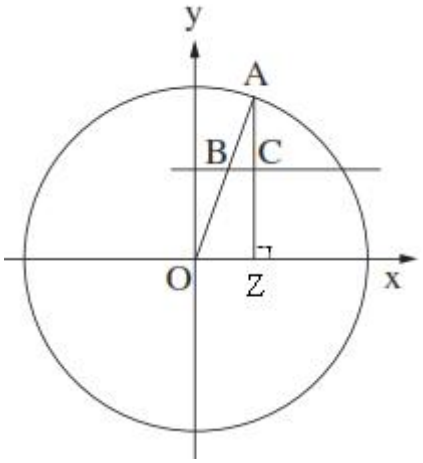
.

בגרות עב יולי 12 מועד קיץ ב שאלון 35007

א. הסבר לפתרון התרגיל - אליפסה היא כיווץ של מעגל.

$C(x, y)$ **נקודה על המקום הגיאומטרי.**

נסמן Z **נקודה על ציר ה-** x **כאשר** ACZ **מאונך לציר ה-** x **.**



כיוון שנתון כי $\frac{AB}{BO}=\frac{3}{4}$ **,** $BC \parallel OZ$ **וגם , הרי שעל פי משפט תאלס,**

גם $\frac{AC}{CZ}=\frac{4}{3}$ **, ולכן** $y_A=\frac{7}{4}y_C$ **על פי חוקי פרופורציה.**

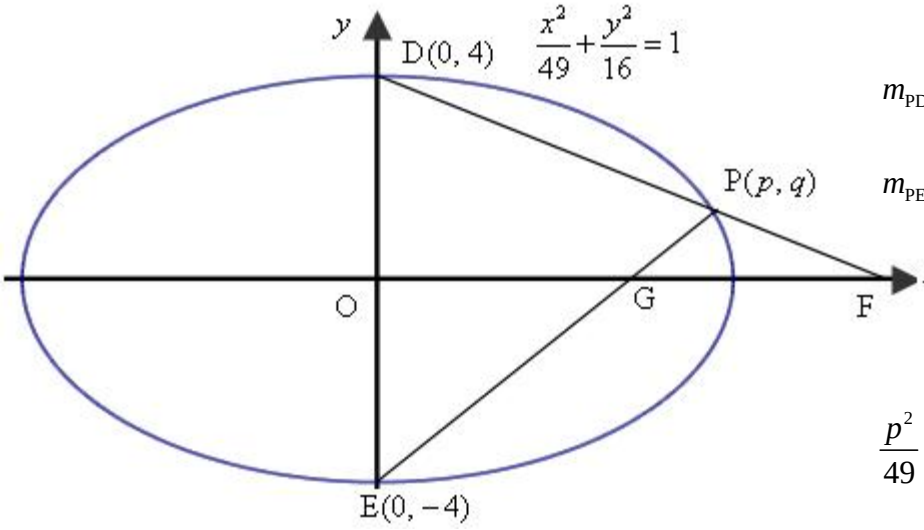
$$x^2+(\frac{7}{4}y)^2=49 \leftarrow \quad x^2+\frac{49}{16}y^2=49 \leftarrow \quad \frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1 \leftarrow .$$

תשובה: $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$ **, אליפסה.**

ב. הנקודות D, E **הן נקודות החיתוך של האליפסה,**

$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$ **עם ציר ה-** y **:** $b=4$ **ולכן** $D(0, 4), E(0, -4)$ **.**

נסמן $P(p, q)$ **נקודה על האליפסה.**



$$m_{PD}=m_{FD} \quad \rightarrow \frac{q-4}{p-0}=\frac{4-0}{0-x_F} \quad \rightarrow x_F=\frac{-4p}{q-4}$$

$$m_{PE}=m_{GE} \quad \rightarrow \frac{q+4}{p-0}=\frac{-4-0}{0-x_G} \quad \rightarrow x_G=\frac{4p}{q+4}$$

$$OF \cdot OG = x_F \cdot x_G = \frac{-4p}{q-4} \cdot \frac{4p}{q+4} = \frac{-16p^2}{q^2-16}$$

על פי משוואת האליפסה:

$$\frac{p^2}{49}+\frac{q^2}{16}=1 \quad \rightarrow p^2=49(1-\frac{q^2}{16})=\frac{49(16-q^2)}{16}$$

ומכאן: $OF \cdot OG = \frac{-16}{q^2-16} \cdot \frac{49(16-q^2)}{16} = 49$

תשובה: $OF \cdot OG = 49$ **, כלומר לגודל קבוע שאינו תלוי בבחירת הנקודה** P **.**

בגרות עב יולי 12 מועד קיץ ב שאלון 35007

א. נתון כי הפירמידה ישרה ובהתאם כל מקצועותיה שווים.

$|\underline{u}|=|\underline{v}|=|\underline{w}| \rightarrow \underline{u}^2=\underline{v}^2=\underline{w}^2$ **, ולכן** $\overrightarrow{SC}=\underline{w}$ **,** $\overrightarrow{SB}=\underline{v}$ **,** $\overrightarrow{SA}=\underline{u}$

כמו כן נתון כי $\underline{u}\underline{v}=\underline{u}\underline{w}=\underline{v}\underline{w}$ **.**

יש להראות כי הווקטור $\boxed{\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}}$ **מאונך למישור** ABC **,**

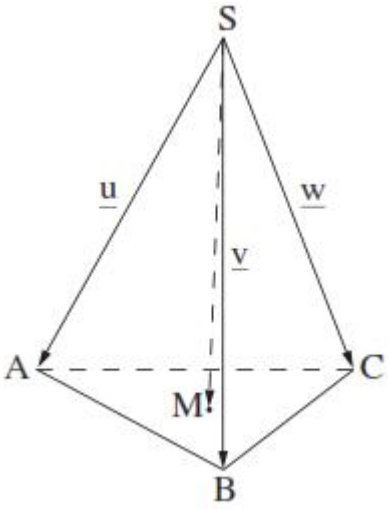
לכן נראה כי הוא יוצר זווית ישרה עם שני וקטורים במישור, שלא תלויים זה בזה.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB} \rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB}=-\underline{u}+\underline{v}}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SC} \rightarrow \boxed{\overrightarrow{AC}=-\underline{u}+\underline{w}}$

$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{3}\underline{u}^2+\cancel{\frac{1}{3}\underline{u}\underline{v}}-\cancel{\frac{1}{3}\underline{u}\underline{v}}+\frac{1}{3}\underline{v}^2-\frac{1}{3}\underline{u}\underline{w}+\frac{1}{3}\underline{v}\underline{w}=0 \leftarrow \underline{u}\underline{w}=\underline{v}\underline{w},\ \underline{u}^2=\underline{v}^2$

$\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\underline{u}^2+\cancel{\frac{1}{3}\underline{u}\underline{w}}-\frac{1}{3}\underline{u}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{v}\underline{w}-\cancel{\frac{1}{3}\underline{u}\underline{w}}+\frac{1}{3}\underline{w}^2=0 \leftarrow \underline{u}\underline{v}=\underline{v}\underline{w},\ \underline{u}^2=\underline{w}^2$



תשובה: הוכח.

ב. על פי סעיף א $\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}$ **הוא הנורמל של המישור** ABC **.**

נתון: $\underline{u}=(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-2),\quad \underline{v}=(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-2),\quad \underline{w}=(0,\sqrt{3},-2)$

$\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}\underline{(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-2)}+\frac{1}{3}\underline{(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-2)}+\frac{1}{3}\underline{(0,\sqrt{3},-2)}$

$\overrightarrow{SM}=\underline{(0,0,-2)}$

לכן, הנורמל למישור הוא $\underline{n}=(0,0,-2)$ **,**

או לשם הפשטות וקטור היחידה $\underline{n}=(0,0,1)$ **ומכאן שמשוואת המישור היא** $z+d=0$ **.**

נתון גם כי $C(0,\sqrt{3},0)$ **, כלומר** $z_C=0$ **, ומכאן שמשוואת המישור** ABC **היא** $z=0$ **(מישור** $[x,y]$**)**

תשובה: משוואת המישור ABC **היא** $z=0$ **.**

ג. נמצא את משוואת המישור העובר בנקודה C **, מקביל למקצוע** AB **, ויוצר זווית של** $30°$ **עם המישור** ABC **.**

$$\overrightarrow{AB} = -\underline{u} + \underline{v} = -\underline{(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -2)} + \underline{(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -2)} = (3,0,0)$$ **.**

כלומר המישור המבוקש מקביל לציר ה- x **ושיעור ה-** x **של הנורמל למישור הוא** 0 **.**

(או - אם $\underline{n} = (a,b,c)$ **וקטור המקדמים של המישור המבוקש, אז** $a \cdot 3 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0 \quad \rightarrow a = 0$ **)**

וקטור המקדמים של המישור המבוקש הוא $\underline{n} = (0,b,c)$ **.**

המישור יוצר זווית של $30°$ **עם המישור** ABC **, שמשוואתו** $z = 0$ **.**

$$\cos 30° = \frac{\left|(0,0,1)(0,b,c)\right|}{\left|(0,0,1)\right|\left|(0,b,c)\right|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \quad \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{c^2}{b^2 + c^2}$$

$$3b^2 + 3c^2 = 4c^2 \quad \rightarrow 3b^2 = c^2$$

נסמן $b = 1$ **, ונקבל** $c = \pm\sqrt{3}$ **ושתי משוואות המישור הן:** $y \pm \sqrt{3}\, z + d = 0$ **.**

נציב $C(0, \sqrt{3}, 0)$ **ונקבל שבשתי האפשרויות למשוואת המישור** $d = -\sqrt{3}$ **.**

תשובה: משוואת המישור היא $y + \sqrt{3}\, z - \sqrt{3} = 0$ **, או** $y - \sqrt{3}\, z - \sqrt{3} = 0$ **.**

נתון כי $\frac{z_1}{z_2}$ הוא מספר מדומה טהור, ויש להראות כי הישר העובר בראשית (O) דרך z_1, מאונך לישר העובר בראשית ודרך z_2 - כלומר להראות כי מכפלת השיפועים שווה ל- -1.

נסמן $z_1 = a+bi$ ($m_{z_1O} = \frac{b}{a}$) ו- $z_2 = c+di$ ($m_{z_2O} = \frac{d}{c}$).

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$$

נתון כי החלק הממשי שווה ל- 0, לכן $ac+bd=0$, או $bd=-ac$.

ומכאן ש $\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = -1$, כלומר הישרים מאונכים זה לזה.

תשובה: הוכח.

נתונה הפונקציה $f(x)=a^{\sin(2x)}+b$ **בתחום** $\frac{®}{12}\le x\le\frac{®}{2}$ **, כאשר** $a>1$ **.**

נתונים הערכים המינימאליים והמקסימאליים של הפונקציה,
שיכולים להתקבל בנקודות הקצה או בנקודות קיצון פנימיות.
נמצא את ערכי הפונקציה בנקודות הקצה:

$$f(\frac{®}{12})=a^{\sin(\frac{®}{6})}+b=a^{0.5}+b=\sqrt{a}+b$$
$$f(\frac{®}{2})=a^{\sin(®)}+b=a^{0}+b=1+b$$

נמצא את ערכי הפונקציה בנקודות הקיצון הפנימיות:

$$f'(x)=2\cos(2x)a^{\sin(2x)}\ell\mathrm{n}\,a$$
$$0=2\cos(2x)a^{\sin(2x)}\ell\mathrm{n}\,a$$
$$\cos(2x)=0$$
$$2x=\frac{®}{2}+®k$$
$$x=\frac{®}{4}+\frac{®}{2}k$$

עבור $k=0$ **נקבל ערך** x **יחיד בתחום -** $x=\frac{®}{4}$ **.**

$$f(\frac{®}{4})=a^{\sin(\frac{®}{2})}+b=a+b$$

כיוון ש $a>1$ **, אז** $1+b<\sqrt{a}+b<a+b$ **,**

כלומר $a+b$ **הוא הערך המקסימלי בתחום הנתון (**$(\frac{®}{4},a+b)$**מקסימום פנימי ומוחלט),**

ו- $1+b$ **הוא הערך המינימלי בתחום הנתון (**$(\frac{®}{2},1+b)$**מינימום קצה ומוחלט).**

נתון כי הערך המינימלי של הפונקציה ($1+b$**) בתחום הנתון הוא** 4**, לכן** $1+b=4$**, כלומר** $b=3$ **.**
נתון כי הערך המקסימלי של הפונקציה ($a+b$**) בתחום הנתון הוא** 6**, לכן** $a+3=6$**, כלומר** $a=3$ **.**
תשובה: $a=3\ ,\ b=3$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a\ell nx}{\sqrt{x}}$, $a<0$.

(1) תחום ההגדרה, הן עקב הפונקציה הלוגריתמית, והן עקב הביטוי בשורש ובמכנה הוא $x>0$.

תשובה: $x>0$.

(2) בנקודות החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$.

לכן $\ell nx=0$ **, ומכאן ש-** $x=1$ **ונקודת החיתוך היחידה היא** $(1,0)$.

עקב תחום ההגדרה הפונקציה אינה חותכת את ציר ה- y .

תשובה: $(1,0)$.

(3) נמצא תחומי עלייה וירידה:

$$f'(x)=a\cdot\frac{\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{\ell nx}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$f'(x)=a\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ell nx}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2-\ell nx}{2x\sqrt{x}}}$$

$$0=2-\ell nx$$

$$\ell nx=2$$

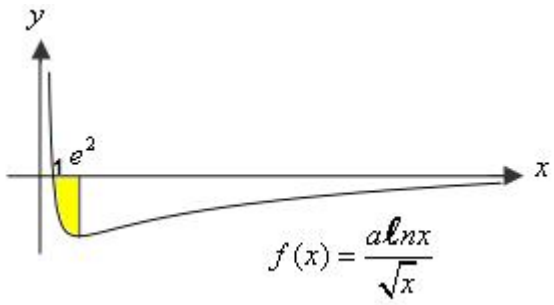
$$x=e^2$$

$$f(e^2)=\frac{a\ell ne^2}{\sqrt{e^2}}=\frac{2a}{e}=0.736a,\ f(e)=\frac{a\ell ne}{\sqrt{e}}=\frac{a}{\sqrt{e}}=0.6a,\ f(e^3)=\frac{a\ell ne^3}{\sqrt{e^3}}=\frac{3a}{\sqrt{e^3}}=0.67a$$

כיוון ש $a<0$ **מתקבל ש-** $0.736a$ **הוא הערך המינימלי של הפונקציה.**

תשובה: תחום ירידה: $0<x<e^2$ **, תחום עלייה:** $x>e^2$.

ב. הסקיצה המתאימה (כולל סימון השטח לסעיף ג)



ג. נחשב את הנפח המבוקש ונשווה אותו ל $\frac{8\pi}{3}$.

$$V=\pi\int_1^{e^2}(\frac{a\ell nx}{\sqrt{x}})^2\,dx$$

$$V=\pi\int_1^{e^2}(a^2\frac{\ell n^2x}{x})\,dx$$

$$V=\pi a^2\int_1^{e^2}(\ell n^2x\cdot\frac{1}{x})\,dx$$

$$V=\frac{\pi a^2\ell n^3x}{3}\Big]_1^{e^2}$$

$$V=\frac{\pi a^2}{3}(\ell n^3\,e^2-\ell n^3\,1)$$

$$V=\frac{\pi a^2}{3}(8-0)$$

$$\boxed{V=\frac{8\pi a^2}{3}}$$

$$\frac{8\pi a^2}{3}=\frac{8\pi}{3}$$

$$a^2=1$$

$$\boxed{a=-1}\quad\leftarrow a<0$$

תשובה: $a=-1$.