

א. נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - 16} = 1$, $a > 0$, $a \neq 4$,

(1) משוואת אליפסה קנונית היא מהצורה: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, כאשר $a, b > 0$.

(אם $a > b$ אז $2a$ הוא הציר הארוך, אך בשאלה הנתונה אין הגבלה)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{16 - a^2} = 1$$

נדרוש $16 - a^2 > 0$ ומתקבלת פרבולה בעלת מקסימום,

ששורשיה הם ± 4 ובהתאם עבור $-4 < a < 4$

אם $16 - a^2 = a^2$ ומכאן ש- $a > 0 \rightarrow a = 2\sqrt{2} \rightarrow a^2 = 8 \rightarrow 16 = 2a^2$

ונקבל מעגל, שהוא מקרה פרטי של אליפסה עבור $a = 2\sqrt{2}$,

בחיתוך עם התנאי $a, b > 0$ נקבל ש: $0 < a < 4$

תשובה: $0 < a < 4$, $a \neq 2\sqrt{2}$.

אם נכיר בכך שמעגל קנוני הוא מקרה פרטי של אליפסה קנונית,

אז תיתכן גם התשובה: $0 < a < 4$

(2) משוואת מעגל היא מהצורה $(x - m)^2 + (y - n)^2 = R^2$

במקרה זה משוואת המעגל, עפ"י א (1) היא $x^2 + y^2 = 8$

תשובה: $a = 2\sqrt{2}$

ב. ידוע כי המשוואה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{16-a^2} = 1$ מייצגת אליפסה, לכן $0 < a^2 < 16$, $a^2 \neq 8$

כאשר על פי הציור האליפסה אינה מעגל לכן $0 < a^2 < 16$, $a^2 \neq 8$

שיעור נקודת החיתוך עם ציר ה- y הם: $(0, \sqrt{16-a^2})$, $(0, -\sqrt{16-a^2})$

ולכן רדיוס המעגל הוא $\sqrt{16-a^2}$ ושטחו: $p(16-a^2)$.

צלעות הריבוע מקבילות לצירים, ושיעורי קדקודי הריבוע, בהתאם,

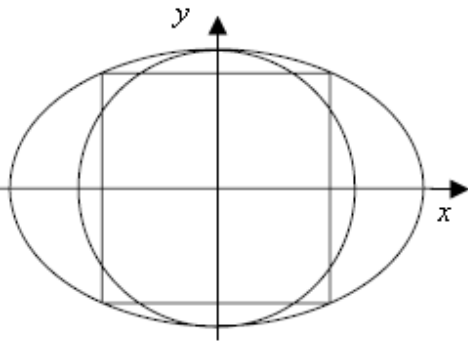
שוים בערך המוחלט ולכן:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{16-a^2} = 1 \rightarrow x^2 = \frac{a^2(16-a^2)}{16}$$

אורך צלע הריבוע $2\sqrt{\frac{a^2(16-a^2)}{16}}$ ושטחו בהתאם $\frac{a^2(16-a^2)}{4}$

נציב ביחס הנתון: $\frac{p(16-a^2)}{\frac{a^2(16-a^2)}{4}} = \frac{4p}{9}$ ונקבל ש: $a^2 = 9$

תשובה: $a^2 = 9$



בגרות ע יולי 10 מועד קיץ ב שאלון 35807

א. נמצא את משוואת מישור הפירמידה, שהצגתו הפרמטרית היא $p: \underline{x} = (2, -1, 4) + t(4, -3, 5) + s(2, -1, 1)$

$$\left. \begin{aligned} (a, b, c) (4, -3, 5) = 0 &\rightarrow 4a - 3b + 5c = 0 \\ (a, b, c) (2, -1, 1) = 0 &\rightarrow 2a - b + c = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 4a - 3b + 5c = 0 \\ -4a + 2b - 2c = 0 \end{aligned} \right\} -b + 3c = 0 \rightarrow b = 3c$$

נסמן $c=1$ ומכאן ש: $b=3$ ולכן: $a=1$ $2a-3+1=0$ ומשוואת המישור: $x+3y+z+d=0$

נציב את שיעורי הקדקוד $B(4, -2, 5)$ $4-6+5+d=0 \rightarrow d=-3$

ומשוואת מישור הבסיס ABCD היא $p: x+3y+z-3=0$

נמצא את ערך הפרמטר בקדקוד $A(6, a, 9)$, על ידי הצבתו במשוואת המישור:

$$A(6, -4, 9) \text{ ושיעורי הקדקוד } 6+3a+9-3=0 \rightarrow a=-4$$

נמצא את שטח בסיס הפירמידה, ששלושה מקדקודיה $A(6, -4, 9)$, $B(4, -2, 5)$, $C(-2, 2, -1)$

$$\overrightarrow{AC} = \underline{C} - \underline{A} = \underline{x} = (-8, 6, -10), \quad \overrightarrow{AB} = \underline{B} - \underline{A} = \underline{x} = (-2, 2, -4)$$

$$\cos \angle BAC = \frac{(-8, 6, -10) \cdot (-2, 2, -4)}{|(-8, 6, -10)| \cdot |(-2, 2, -4)|}$$

$$\cos \angle BAC = \frac{|16+12+40|}{\sqrt{64+36+100} \sqrt{4+4+16}} = \frac{68}{\sqrt{200} \sqrt{24}}$$

$$\angle BAC = 11.039^\circ$$

שטח הבסיס $S_{ABCD} = \sqrt{200} \sqrt{24} \sin 11.039^\circ = 13.266$ יח"ר

אורך הגובה הוא מרחק הקדקוד $S(1, 1, 8)$ ממישור הבסיס $p: x+3y+z-3=0$

$$V = \frac{13.266 \cdot 2.7136}{3} = 12 \text{ ונפח הפירמידה } h = \frac{|1+3+8-3|}{\sqrt{1+9+1}} = 2.7136 \text{ יחידות}$$

תשובה: נפח הפירמידה 12 יחידות נפח.

ב. המישור p חותך את הצירים בנקודות K, L, M

נמצא את שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים, על ידי הצבת 0 בהתאם לציר הנבחר:

ציר x : $(3, 0, 0)$, ציר y : $(0, 1, 0)$, ציר z : $(0, 0, 3)$.

כיוון שהצירים מאונכים זה לזה, הרי שנפח הפירמידה: 1.5 יחידות נפח $V = \frac{(0.5 \cdot 3 \cdot 1) \cdot 3}{3}$

והיחס בין נפח הפירמידה SABCD לבין נפח הפירמידה OKLM הוא $12:1.5=8$.

תשובה: 8.

ג. הצגה פרמטרית של גובה הפירמידה SABCD היא $h = \underline{x} = (1, 1, 8) + p(1, 3, 1)$
ישר זה לא מקביל לאף אחד מהצירים ולכן חותך את שלוש פאות הפירמידה OKLM,
המונחות על המישורים: $[x, y], [x, z], [y, z]$.
הפאה הרביעית היא המישור p עצמו אשר גובה הפירמידה SABCD מאונך לו ולכן חותך אותו.
תשובה: הישר שעליו נמצא גובה הפירמידה SABCD חותך את כל מישורי הפירמידה OKLM.

א. נתונה המשוואה הריבועית $2z^2 - (m-2)z - \frac{1}{8}i = 0$.

נשתמש בנוסחאות ויאטה:

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = -4 \rightarrow \frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2} = -4 \rightarrow \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -4$$

$$b = 4c$$

$$-(m-2) = 4 \cdot -\frac{1}{8}i \rightarrow m-2 = \frac{1}{2}i \rightarrow \boxed{m = 2 + \frac{1}{2}i}$$

תשובה: $m = 2 + \frac{1}{2}i$

(נשים לב ש-0 אינו פתרון של המשוואה ובהתאם המשוואה $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = -4$ מוגדרת היטב)

ב. (1) כיוון שהמשוואה ריבועית, פתרון יחיד מתקבל כאשר $\Delta = 0$

$$(-(m-2))^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-\frac{1}{8}i) = 0 \rightarrow m^2 - 4m + 4 + i = 0$$

$$\Delta_{\Delta} = 16 - 4(4+i)$$

$$\boxed{\Delta_{\Delta} = -4i} \rightarrow \boxed{\Delta_{\Delta} = 4 \text{cis } 270^\circ}$$

$$t_k = \sqrt{4} \text{cis } \frac{270^\circ + 360^\circ k}{2}$$

$$t_0 = 2 \text{cis } 135^\circ = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, t_1 = 2 \text{cis } 315^\circ = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$m_{1,2} = \frac{4 \pm (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)}{2}$$

$$m_1 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \rightarrow m_2 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

תשובה: $2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

(2) הפתרון היחיד מתקבל בנקודת הקדקוד: $z_k = -\frac{b}{2a} = \frac{m-2}{4}$

בהתאם לפתרון סעיף ב (1) נקבל: $z_1 = \frac{1}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)$ ו- $z_2 = \frac{1}{4}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$

שני הפתרונות נמצאים על הישר $y = -x$ העובר בראשית הצירים.

(3) אורך כל רדיוס מראשית הצירים לפתרונות המשוואה הוא $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}$

ולכן נמצאים על המעגל הקטן $x^2 + y^2 = \frac{1}{16}$.

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - 2x - a}{e^{-x}}$, שהמכנה שלה חיובי לכל x .

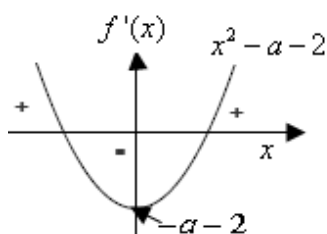
תשובה: כל x .

ב. נמצא את תחומי העלייה והירידה:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)e^{-x} + (x^2 - 2x - a)e^{-x}}{e^{-2x}}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(2x-2+x^2-2x-a)}{e^{-2x}}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - a - 2}{e^{-x}}$$



המכנה חיובי לכל x ולכן סימן נגזרת נקבע על ידי הטרינום הריבועי $x^2 - a - 2$.
כאשר $-a-2 < 0 \rightarrow a > -2$ נקבל פרבולה בעלת מינימום החותכת את ציר ה- x פעמיים,

ובכל אחת מהפעמים תהיה נקודת קיצון של $f(x)$ (משמאל לימין: מקסימום, מינימום)

תשובה: $a > -2$

ג. שיעורי ה- x של נקודות הקיצון הם $\pm\sqrt{a+2}$ ולכן המרחק בין הישרים הוא $2\sqrt{a+2}$

$$2\sqrt{a+2} = 6 \rightarrow \sqrt{a+2} = 3 \rightarrow a+2 = 9$$

$$a = 7 \quad \sqrt{7+2} = 3 \rightarrow 3 = 3 \text{ ok.}$$

תשובה: $a = 7$

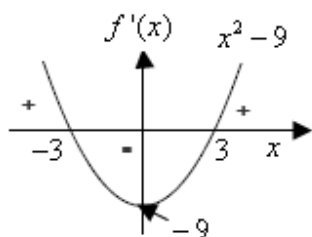
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 7}{e^{-x}} \quad \text{נציב } a = 7 \text{ ונקבל:}$$

ד. נמצא את תחומי העלייה והירידה:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)e^{-x} + (x^2 - 2x - 7)e^{-x}}{e^{-2x}}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(2x-2+x^2-2x-7)}{e^{-2x}}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 9}{e^{-x}}$$



הנגזרת מתאפסת עבור $x = \pm 3$, כאשר עבור $x = -3$ הפונקציה עוברת מעלייה לירידה ולכן מקסימום, ועבור $x = 3$ מירידה לעלייה ולכן מינימום.

תשובה: $x = -3$ מקסימום, $x = 3$ מינימום.

ה. בנקודות החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y = 0$

$$x^2 - 2x - 7 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{32}}{2}$$

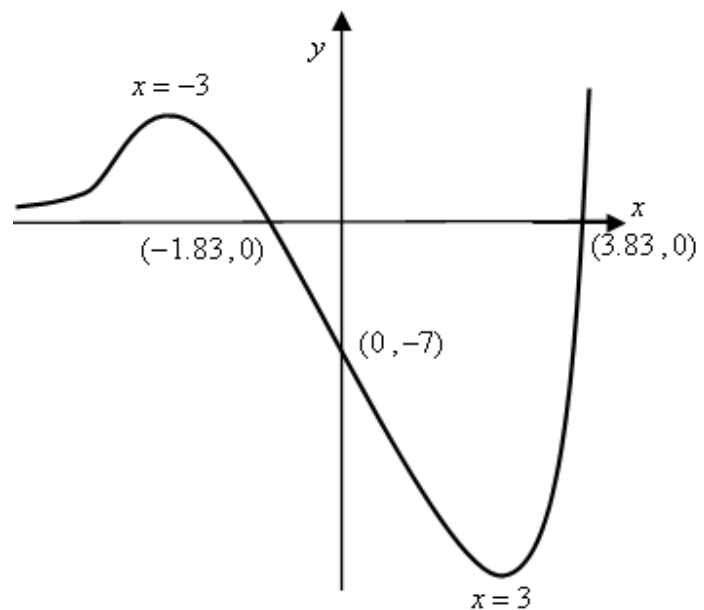
$$x_1 = 3.83 \rightarrow (3.83, 0)$$

$$x_2 = -1.83 \rightarrow (-1.83, 0)$$

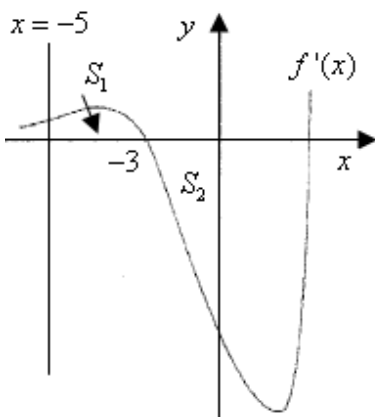
$$f(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 - 7}{e^{-0}} = -7 \rightarrow (0, -7) \text{ : ובהתאם } x=0 \text{ מתקיים}$$

תשובה: $(0, -7)$, $(-1.83, 0)$, $(3.83, 0)$

ו. סקיצה של גרף הפונקציה (נשים לב ש- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ובהתאם $y = 0$ אסימפטוטה אופקית)



ז. נחשב את השטח המבוקש - שהוא חיבור של שני שטחים.



$$S_1 = \int_{-5}^{-3} (f'(x) - 0) dx$$

$$S_1 = f(x) \Big|_{-5}^{-3}$$

$$S_1 = f(-3) - f(-5)$$

$$S_1 = 0.398 - \left(\frac{(-5)^2 - 2 \cdot (-5) - 7}{e^5} \right)$$

$$S_1 = 0.398 - 0.189$$

$$S_1 = 0.209$$

$$S_2 = \int_{-3}^0 (0 - f'(x)) dx$$

$$S_2 = -f(x) \Big|_{-3}^0$$

$$S_2 = -f(0) + f(-3)$$

$$S_2 = 7 + \left(\frac{(-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 7}{e^3} \right)$$

$$S_2 = 7 + 0.398$$

$$S_2 = 7.398$$

$$0.209 + 7.398 = 7.607 \text{ יח"ר} = \text{השטח כולו:}$$

תשובה: 7.607 יח"ר.

נתונה הפונקציה $f(x) = \log_b(ax)$ בתחום $0 < b < 1$, $a > 0$, $1 \leq x \leq 2$.
 בתחום הנתון הערך הגדול ביותר של הפונקציה הוא 4,
 והערך הקטן ביותר של הפונקציה הוא 2.

$a > 0$ ולכן תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x > 0$, ולכן בתחום הנתון, $1 \leq x \leq 2$, הפונקציה רציפה.

כיוון $0 < b < 1$ הרי שהפונקציה יורדת, לכל $x > 0$ ובפרט בתחום $1 < x < 2$.

(ניתן לראות זאת גם על ידי נגזרת הפונקציה $f'(x) = \frac{a}{ax \ln b} = \frac{1}{x \ln b} < 0$)

לכן ערכי הקיצון הם בקצוות התחום: $f(2) = 2$, $f(1) = 4$.

$$\begin{cases} 4 = \log_b(a \cdot 1) \\ 2 = \log_b(a \cdot 2) \end{cases}$$

$$(a > 0): \begin{cases} b^4 = a \\ b^2 = 2a \end{cases}$$

$$b^2 = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

תשובה: $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a = \frac{1}{4}$

נתונה הפונקציה $f(x) = \log_a(\tan x) + \log_a\left(\frac{3x-x^2}{\tan x}\right)$ בתחום $0 < a < 1, 0 < x < \frac{p}{2}$.

בתחום הנתון, $0 < x < \frac{p}{2}$, מוגדרת פונקציית ה- \tan וחיובית ולכן הביטוי $\log_a(\tan x)$ מוגדר בתחום.

בתחום הנתון, $0 < x < \frac{p}{2}$, הביטוי $3x-x^2$ חיובי (חיובי בתחום $0 < x < 3$)

וגם הביטוי $\tan x$ חיובי ולכן המנה חיובית והביטוי $\log_a\left(\frac{3x-x^2}{\tan x}\right)$ מוגדר.

לכן הפונקציה רציפה בתחום $0 < x < \frac{p}{2}$.

בהתאם נפשט את הפונקציה לפני הגזירה:

$$f(x) = \log_a(\tan x) + \log_a\left(\frac{3x-x^2}{\tan x}\right) = \log_a(\tan x) + \log_a(3x-x^2) - \log_a(\tan x)$$

$$f(x) = \log_a(3x-x^2)$$

נמצא את נקודות הקיצון :

$$f'(x) = \frac{3-2x}{(3x-x^2)\ln a}$$

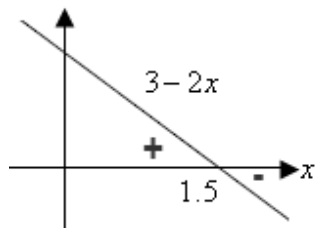
הנגזרת מתאפסת רק עבור $3-2x=0 \rightarrow x=1.5$.

$\ln a < 0$ ולכן $0 < a < 1$

בהתאם: הפונקציה יורדת בתחום $0 < x < 1.5$

ועולה בתחום $1.5 < x < \frac{p}{2} = 1.571$

תשובה: $x=1.5$ מינימום.



ניתן לגזור גם את "הפונקציה המקורית"

$$f'(x) = \frac{1}{\tan x \cos^2 x \ln a} + \frac{1}{\frac{3x-x^2}{\tan x} \ln a} \cdot \frac{(3-2x) \tan x - \frac{3x-x^2}{\cos^2 x}}{\tan^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \left(\frac{1}{\tan x \cos^2 x} + \frac{(3-2x) \sin x \cos x - 3x + x^2}{(3x-x^2) \tan x \cos^2 x} \right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{3x-x^2 + (3-2x) \sin x \cos x - 3x + x^2}{(3x-x^2) \tan x \cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{(3-2x) \sin x \cos x}{(3x-x^2) \tan x \cos^2 x}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3-2x}{(3x-x^2) \ln a}}$$