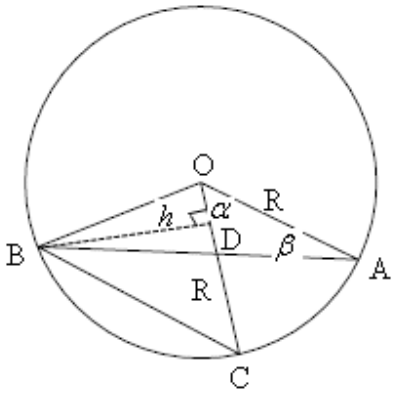
בגרות סח יוני 08 מועד קיץ א שאלון 35004

**א. נעלה את השרטוט המעודכן והסברים בהמשך:**




**לשני המשולשים** BOD **ו-** BOC **גובה משותף** $h$ **לצלעות** OD **ו-** OC **בהתאמה (ראה ציור).**

**לכן יחס השטחים שווה ליחס בין שתי צלעות אלו:**

$$\frac{S_{\Delta BOD}}{S_{\Delta BOC}}=\frac{\frac{OD\cdot h}{2}}{\frac{OC\cdot h}{2}}=\frac{OD}{OD}=\frac{OD}{R}$$

**משולש** ABC **(משפט סינוסים):**

$$\frac{R}{\sin(180^\circ-(b+a))}=\frac{OD}{\sin b}$$

$$OD=\frac{R\sin b}{\sin(b+a)} \quad \leftarrow \sin x=\sin(180^\circ-x)$$

$$\boxed{\frac{S_{\Delta BOD}}{S_{\Delta BOC}}=\frac{\sin b}{\sin(b+a)}}$$

**תשובה:** $\frac{\sin b}{\sin(b+a)}$

**ב. נתון גם** $a=b$

$$\frac{\text{שטח המשולש BOD}}{\text{שטח המשולש BOC}}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{\sin a}{\sin 2a}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{\sin a}{2\sin a\cos a}=\frac{2}{3}$$

$$\cos a=0.75$$

$$\boxed{a=41.41^\circ}$$

**תשובה:** $a=41.41^\circ$

**א. נתונה הפונקציה** $f(x)=\frac{\sin x-1}{\sin x}$ **בתחום** $0<x<p$

**(1) נמצא את תחום ההגדרה, לאור קיום המכנה:**

$$0\neq \sin x$$

$$\boxed{x\neq p\,k}$$

| $k$ | $x=p\,k$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | $p$ |

**עבור שיעורי** $x$ **אלה יתאפס מכנה הפונקציה ולא המונה.**

**לכן ערכי הפונקציה שבתחום ההגדרה** $0<x<p$

**שואפים לישרים:** $x=0,\ x=p$

**וישרים אלו הם אסימפטוטות אנכיות של הפונקציה.**

**תשובה:** $x=0,\ x=p$

**(2) נמצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-** $x$ **:.**

$$0=\frac{\sin x-1}{\sin x}$$

$$0=\sin x-1$$

$$\sin x=1$$

$$\boxed{x=\frac{p}{2}+2p\,k}$$

| $k$ | $x=\frac{p}{2}+2p\,k$ | |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{p}{2}$ | $(\frac{p}{2},0)$ |

**תשובה:** $(\frac{p}{2},0)$

**(3) נמצא את תחום ההגדרה, לאור קיום המכנה:**

**הפונקציה מוגדרת בתחום הפתוח** $0 < x < p$ **,**

**נמצא נקודות קיצון פנימיות:**

$$f(x) = \frac{\sin x - 1}{\sin x}$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{\sin x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$0 = \cos x$$

$$x = \frac{p}{2} + p\,k$$

| $k$ | $x = \frac{p}{2} + p\,k$ | |
|---|---|---|
| 0 | $x = \frac{p}{2}$ | $(\frac{p}{2}, 0)$ |
| 1 | - | |

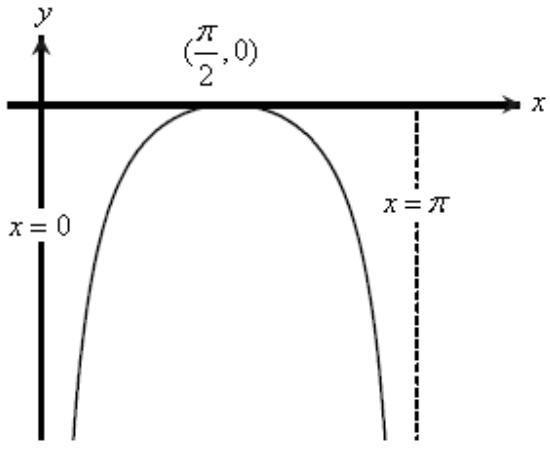
**נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון (מכנה הנגזרת חיובי)**

$$f'(\frac{p}{4}) = \cos\frac{p}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0, \quad f'(\frac{3p}{4}) = \cos\frac{3p}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

| $x$ | $p$ | | $\frac{p}{2}$ | | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | | 0 | | |
| **מסקנה** | | ↘ | **Max** | ↗ | |

**תשובה: מקסימום** $(\frac{p}{2}, 0)$

**ב. נעלה סקיצה מתאימה, בהתאם לנקודת הקיצון, תחומי עלייה וירידה ואסימפטוטות:**



**א. נתונה הפונקציה** $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2-2}$

**(1) נמצא את שיעור ה-** $x$ **של נקודת הקיצון**

$$f'(x)=\frac{-2x(x^2-2)-2x\cdot(a-x^2)}{(x^2-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x(-(x^2-2)-(a-x^2)}{(x^2-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x(-x^2+2-a+x^2)}{(x^2-2)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2x(2-a)}{(x^2-2)^2}}$$

**כיוון שנתון** $a\neq 2$ **, הרי שהנגזרת מתאפסת רק עבור** $x=0$

**אומנם נתון כי יש נקודת קיצון,**

**אולם למען הסר ספק נאשש זאת בעזרת סימן הנגזרת השנייה**

**בנקודות חשודות כקיצון (מכנה נגזרת חיובי)**

$f''(x)=2(2-a)\neq 0$ **וזו נקודת קיצון (לא ניתן לדעת את סוגה, בשלב זה)**

$$f(0)=\frac{a-0^2}{0^2-2}=-\frac{a}{2}$$

**תשובה:** $x=0$ **,** $y=-\frac{a}{2}$

**(2) כיוון שהנגזרת מתאפסת רק עבור** $x=0$ **,**

**ולכן בנקודה זו המשיק מקביל לציר ה-** $x$ **,**

**אז** $-\frac{a}{2}=-4.5$

$$\boxed{a=9}$$

**תשובה:** $a=9$

**ב.** $\boxed{f(x)=\frac{9-x^2}{x^2-2}}$

**(1) נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה:**

$$x^2-2\neq 0$$

$$x\neq\sqrt{2},\quad x\neq-\sqrt{2}$$

**תשובה:** $x\neq\sqrt{2},\quad x\neq-\sqrt{2}$

**(2) אסימפטוטה אנכית**

$x=\sqrt{2},\quad x=-\sqrt{2}$ **מאפסים את המכנה אך לא את מונה הפונקציה.**

**<u>אסימפטוטה אופקית</u>: מעלת פולינום מונה** $(2)$ **שווה למעלת פולינום מכנה** $(2)$**,**

**לכן** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9-x^2}{x^2-2}=-1$

**תשובה:** $x=\sqrt{2},\quad x=-\sqrt{2}$ **,** $y=-1$

**(3) נמצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים:**

**בציר ה-** $y$ **:** $x=0$ **ונקבל** $(0,-4.5)$

**בציר ה-** $x$ **:** $y=0$ **ולכן** $x^2=9$ **ובהתאם** $(-3,0)\quad (3,0),$ **.**

**תשובה**: $(-3,0)\quad (3,0),$ **,** $(0,-4.5)$

**(4) נקודת קיצון וסוגה:**

$$f'(x)=\frac{-2x(x^2-2)-2x\cdot(9-x^2)}{(x^2-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x(-(x^2-2)-(9-x^2)}{(x^2-2)^2}$$

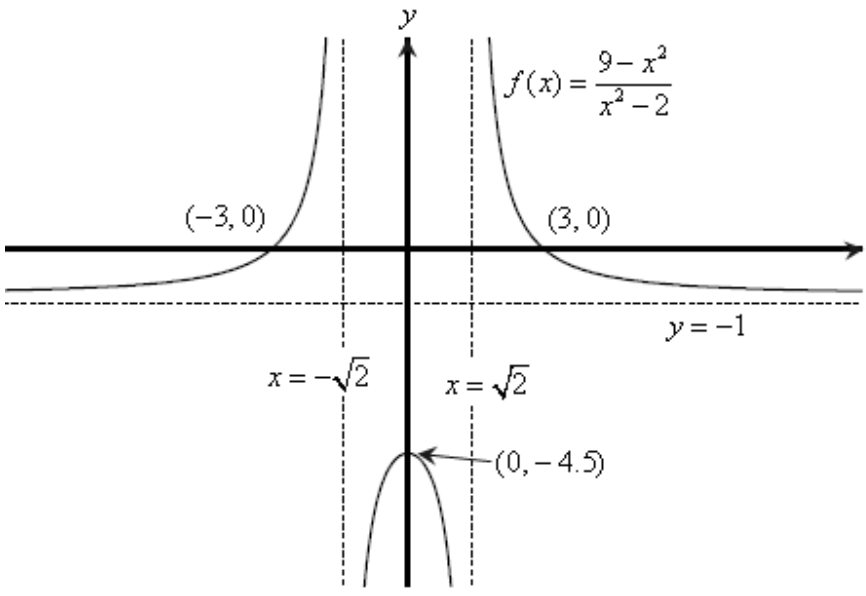
$$f'(x)=\frac{2x(-x^2+2-9+x^2)}{(x^2-2)^2}$$

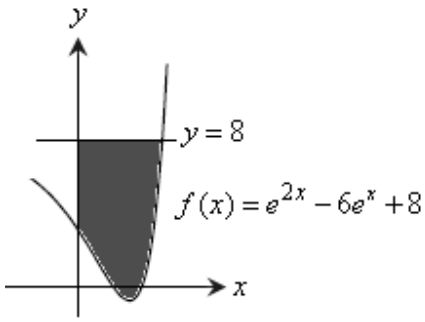
$$\boxed{f'(x)=\frac{-14x}{(x^2-2)^2}}$$

**קל לראות שסימן הנגזרת הפוך לשיעורי ה-** $x$ **, ובהתאם:**

**עלייה:** $x<0,\quad x\neq-\sqrt{2}$ **ירידה:** $x>0,\quad x\neq\sqrt{2}$

**ג. <u>הסקיצה המתאימה</u>**






**נמצא את שיעור ה-$x$ של הנקודה הימנית של השטח המבוקש:**

$$e^{2x}-6e^{x}+8=8$$
$$e^{x}(e^{x}-6)=0$$
$$e^{x}=6$$
$$x=\ln 6$$

**נכין טבלה לסיוע בחישוב השטח**

| | |
|---|---|
| **פונקציה עליונה** | $y=8$ |
| **פונקציה תחתונה** | $f(x)=e^{2x}-6e^{x}+8$ |
| $x$ **גדול** | $x=\ln 6$ |
| $x$ **קטן** | $x=0$ |

$$S=\int_{0}^{\ln 6}(8-(e^{2x}-6e^{x}+8))dx$$
$$S=\int_{0}^{\ln 6}(-e^{2x}+6e^{x})dx$$
$$S=-\frac{e^{2x}}{2}+6e^{x}\Big]_{0}^{\ln 6}$$
$$S=(-\frac{e^{2\ln 6}}{2}+6e^{\ln 6})-(-\frac{e^{2\cdot 0}}{2}+6e^{\ln 0})$$
$$S=(-18+36)-(-0.5+6)$$
$$\boxed{S=12.5}$$

**תשובה: גודל השטח הוא** 12.5 **יח"ר.**

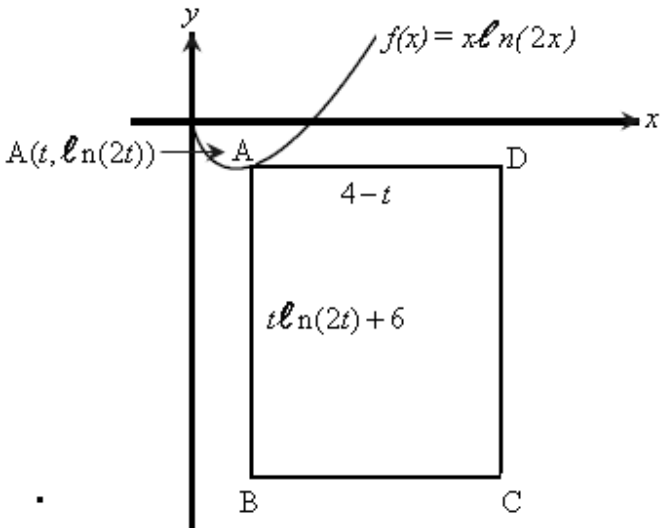
**הפונקציה שיש להביא ל*מינימום* היא *היקף המלבן*** ABCD.

**קדקוד** A **של המלבן נמצא על גרף הפונקציה** $f(x)=x\ln(2x)$

**נסמן את הנקודה** A **עם השיעורים** $A(t,\ln(2t))$ **ונביע באמצעות** $t$ **את היקף המלבן** ABCD

**מכיוון ו-** AB **מקביל לציר ה-** y **, הרי ש-** $AB=t\ln(2t)-(-6)=t\ln(2t)+6$

**מכיוון ו-** AD **מקביל לציר ה-** $x$ **, הרי ש-** $AD=4-t$




**נמצא את היקף המלבן:**

$$f(t)=2AP+2AD=2\cdot(t\ln(2t)+6)+2(4-t)$$

$$\boxed{f(t)=2t\ln(2t)-2t+20}$$

$$f'(t)=2\ln(2t)+\frac{2t\cdot 2}{2t}-2$$

$$\boxed{f'(t)=2\ln(2t)}$$

$$0=2\ln(2t)$$

$$\ln(2t)=0$$

$$2t=e^0$$

$$\boxed{t=0.5}$$

**(הנגזרת השנייה חיובית בכל תחום ההגדרה)** $f''(t)=\frac{2\cdot 2}{2t}=\frac{2}{t}>0 \quad \rightarrow Min$

$t=0.5$ **יביא את היקף המלבן** ABCD **למינימום**

**נמצא את ההיקף המינימלי של המלבן, (הערה - במקרה זה** AD **מתלכד עם ציר ה-** $x$ **)**

$$f(0.5)=2\cdot 0.5\ln(2\cdot 0.5)-2\cdot 0.5+20=20-1=19$$

**ההיקף המינימלי של המלבן** ABCD **הוא** 19 **יח'.**

**תשובה:** 19 **יח'.**