**א. המספר התלת-ספרתי הקטן ביותר, המתחלק ב-** $6$ **הוא** $102$**.**

**המספר התלת-ספרתי הגדול ביותר, המתחלק ב-** $6$ **הוא** $996$ **.**

**נמצא את מספר המספרים התלת-ספרתיים, המתחלקים ב-** $6$ ***ללא שארית.***

**סדרת האיברים המתחלקים ב-** $6$ ***ללא שארית* היא חשבונית:** $a_1 = 102,\ d = 6$ **, כאשר** $a_n = 996$ **.**

$$a_n = 996$$
$$102 + (n-1)\cdot 6 = 996$$
$$102 + 6n - 6 = 996$$
$$6n = 900$$
$$n = 150$$

**בסדרה זו** $150$ **איברים.**

$$S_{150} = \frac{150\cdot(102+996)}{2} = 82,350$$

**תשובה: הסכום הוא** $82,350$**.**

**ב. בסדרה ההנדסית האין-סופית:** $\boxed{b_1 = 996}$ **, ו-** $b_4 = 124.5$**.**

**נמצא את מנת הסדרה.**

$$b_4 = 124.5$$
$$b_1 q^3 = 124.5$$
$$996q^3 = 124.5$$
$$q^3 = \frac{1}{8}$$
$$\boxed{q = \frac{1}{2}}$$

**נמצא את סכום הסדרה ההנדסית האין-סופית.**

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$
$$S = \frac{996}{1-\frac{1}{2}}$$
$$\boxed{S = 1992}$$

**תשובה: הסכום הוא** $1,992$.

**ג. סכום כל האיברים שאחרי האיבר הראשון הוא** $\frac{b_2}{1-q} = \frac{b_1 q}{1-q} = \frac{b_1\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{b_1\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = b_1$

**ולכן האיבר הראשון בסדרה ההנדסית שווה לסכום של כל האיברים שאחריו.**

**תשובה: הוכַח.**

**א. בסיס הפירמידה הישרה** $SABC$ **הוא משולש ישר זווית, שבו** $\sphericalangle ACB=90^\circ$ **.**

**הגובה, בפירמידה ישרה, יורד למרכז המעגל החוסם,**

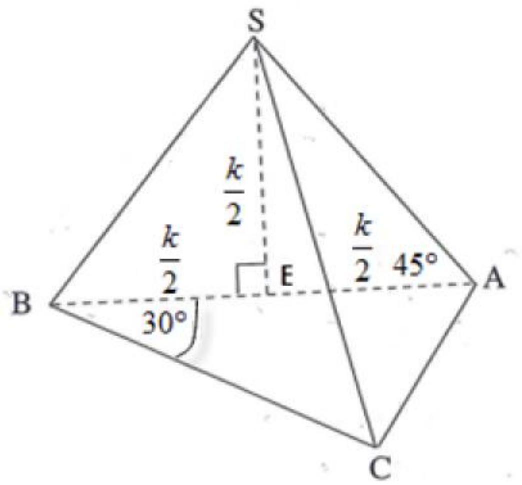
**וכאשר הבסיס הוא משולש ישר זווית, הרי שמרכז המעגל החוסם הוא באמצע היתר.**

**נסמן ב-** $E$ **את אמצע היתר** $AB$ **, שאורכו** $k$ **, ולכן** $SE$ **הוא גובה הפירמידה, וגם גובה הפאה** $SAB$ **.**

**נתון כי הזווית שבין המקצוע הצדדי לבסיס היא בת** $45^\circ$ **,**

**ולכן** $\sphericalangle SAE=45^\circ$ **ו-** $\Delta SAE$ **הוא ישר זווית ושווה שוקיים, וגובה הפירמידה הוא** $SE=AE=\frac{k}{2}$ **.**

**נתון גם כי** $\sphericalangle ABC=30^\circ$ **.**




$\underline{\Delta ABC}$

$$\cos\sphericalangle ABC=\frac{BC}{AB}$$

$$\cos 30^\circ=\frac{BC}{k} \quad /\cdot k$$

$$\boxed{\frac{k\sqrt{3}}{2}=BC}$$

**שטח הבסיס הוא:** $\frac{k^2\sqrt{3}}{8}=\frac{k\cdot k\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 30^\circ}{2}=\frac{AB\cdot BC\cdot\sin\sphericalangle ABC}{2}$ **.**

**נפח הפירמידה הוא:** $\frac{k^3\sqrt{3}}{48}=\frac{\frac{k^2\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{k}{2}}{3}=\frac{S_{\Delta ABC}\cdot SE}{3}$ **.**

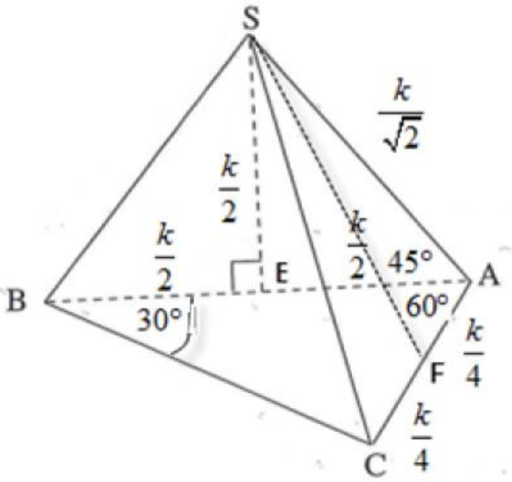
**תשובה: נפח הפירמידה הוא** $\frac{k^3\sqrt{3}}{48}$ **.**

ב. נמצא את SA, המקצוע הצדדי, באמצעות משפט פיתגורס ב- $\Delta SAE$ .

$$SA=\sqrt{(SE)^2+(AE)^2}=\sqrt{(\frac{k}{2})^2+(\frac{k}{2})^2}=\sqrt{\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{4}}=\sqrt{\frac{k^2}{2}}=\frac{k}{\sqrt{2}}$$ .

ב- $\Delta ABC$ זוויות $30°, 60°, 90°$ ולכן הניצב הקצר שווה למחצית היתר, כלומר $AC=\frac{AB}{2}=\frac{k}{2}$ .

נסמן ב- F את אמצע מקצוע הבסיס AC , ולכן $AF=\frac{AC}{2}=\frac{k}{4}$ ,




ו- SF הוא גובה לבסיס AC בפאה SAC.

נמצא את SF באמצעות משפט פיתגורס ב- $\Delta SAF$ .

$$SF=\sqrt{(SA)^2-(AF)^2}=\sqrt{(\frac{k}{\sqrt{2}})^2-(\frac{k}{4})^2}=\sqrt{\frac{k^2}{2}-\frac{k^2}{16}}=\sqrt{\frac{7k^2}{16}}=\frac{k\sqrt{7}}{4}$$

תשובה: הגובה לבסיס AC בפאה SAC הוא $\frac{k\sqrt{7}}{4}$ .

**א. נתונות הפונקציה** $f(x)=\sqrt{x}$ **, שתחום ההגדרה שלה הוא** $x\ge 0$ **.**

**נתונה הפונקציה** $g(x)=(\frac{1}{2})^{x-1}$ **גם בתחום** $x\ge 0$ **(למרות שתחום ההגדרה הרגיל שלה הוא כל** $x$ **).**

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ **, נגזרת שהיא חיובית עבור** $x>0$ **, ולכן הפונקציה עולה עבור** $x>0$ **ויורדת לאף** $x$ **.**

$g'(x)=(\frac{1}{2})^{x-1}\cdot\ell n(\frac{1}{2})$ **, כאשר** $(\frac{1}{2})^{x-1}>0$ **ו-** $\ell n(\frac{1}{2})<0$ **.**

**לכן, הנגזרת שלילית עבור** $x>0$ **, ולכן הפונקציה יורדת עבור** $x>0$ **ועולה לאף** $x$ **.**

**תשובה:** $f(x)$ **עולה עבור** $x>0$ **ויורדת לאף** $x$ **.** $g(x)$ **יורדת עבור** $x>0$ **ועולה לאף** $x$ **.**

**ב. לשתי הפונקציות נקודות קצה עבור** $x=0$ **.**

$f(0)=\sqrt{0}=0$ **, ובהתאם** $(0,0)$ **מינימום מוחלט, כי** $f(x)$ **עולה עבור** $x>0$ **.**

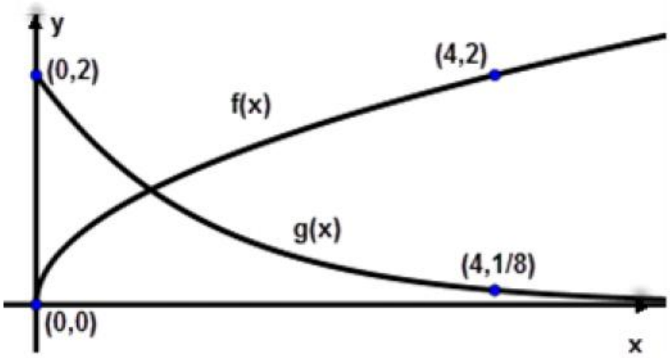
$g(0)=(\frac{1}{2})^{0-1}=(\frac{1}{2})^{-1}=2$ **, ובהתאם** $(0,2)$ **מקסימום מוחלט, כי** $g(x)$ **יורדת עבור** $x>0$ **.**

**תשובה:** $f(x)$ **:** $(0,0)$ **מינימום מוחלט.** $g(x)$ **:** $(0,2)$ **מקסימום מוחלט.**

**ג. נבדוק את ערכי הפונקציות עבור** $x=4$ **.**

$f(4)=\sqrt{4}=2$ **.**

$g(4)=(\frac{1}{2})^{4-1}=(\frac{1}{2})^{3}=\frac{1}{8}$ **.**




**מכאן ש-** $f(4)>g(4)$ **והגרף של** $f(x)$ **מעל לגרף של** $g(x)$ **.**

**תשובה: הגרף של** $f(x)$ **מעל לגרף של** $g(x)$ **.**

**ד.** $f(0)>g(0)$ **והגרף של** $g(x)$ **מעל לגרף של** $f(x)$ **.**

**עבור** $x=4$ **הגרף של** $f(x)$ **מעל לגרף של** $g(x)$ **.**

**לכן, הגרפים של שתי הפונקציות נפגשים בנקודה אחת, בתחום** $0<x<4$ **.**

**כיוון שפונקציה אחת עולה והשנייה יורדת, שתיהן בתחום** $x>0$ **, זו תהייה נקודת חיתוך יחידה.**

**תשובה: הגרפים של הפונקציות נפגשים.**

**א. נתונה הפונקציה** $f(x)=\sin(2x)+2\cos x$ **בתחום** $0\le x\le 2\pi$ **.**

**נמצא תחילה את נקודות הקצה.**

$f(0)=\sin(2\cdot 0)+2\cos 0=2 \quad \rightarrow \boxed{(0,2)}$

$f(2\pi)=\sin(2\cdot 2\pi)+2\cos 2\pi=2 \quad \rightarrow \boxed{(2\pi,2)}$

$\boxed{f'(x)=2\cos 2x-2\sin x}$

$0=2\cos 2x-2\sin x \quad /:2$

$0=\cos 2x-\sin x$

$\sin x=\cos 2x$

$\cos(90^\circ-x)=\cos 2x$

$90^\circ-x=2x+360^\circ k$

$-3x=90^\circ+360^\circ k \quad :(-3)$

$\boxed{x=30^\circ+120^\circ k}$

$90^\circ-x=-2x+360^\circ k$

$\boxed{x=-90^\circ+360^\circ k}$

| $k$ | $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k$ | $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ |
|---|---|---|
| 0 | $x=\frac{\pi}{6}$ | - |
| 1 | $x=\frac{5\pi}{6}$ | $x=\frac{3\pi}{2}$ |
| 2 | $x=\frac{3\pi}{2}$ | |

$f(\frac{\pi}{6})=\sin(2\cdot\frac{\pi}{6})+2\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \boxed{(\frac{\pi}{6},\frac{3\sqrt{3}}{2})}$

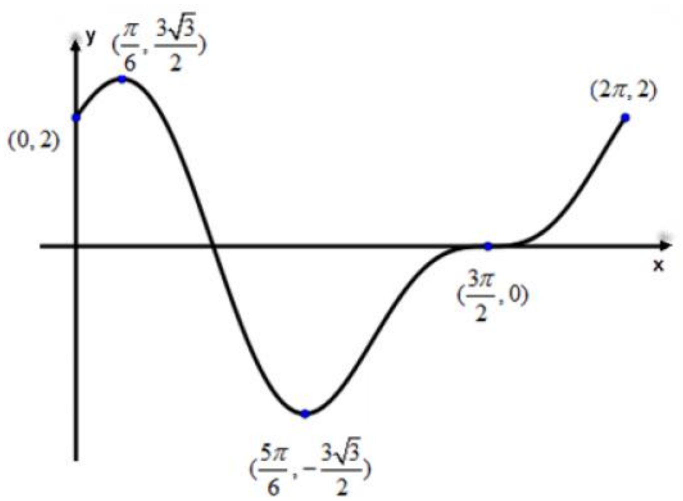
$f(\frac{5\pi}{6})=\sin(2\cdot\frac{5\pi}{6})+2\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \boxed{(\frac{5\pi}{6},-\frac{3\sqrt{3}}{2})}$

$f(\frac{3\pi}{2})=\sin(2\cdot\frac{3\pi}{2})+2\cos\frac{3\pi}{2}=0 \quad \rightarrow \boxed{(\frac{3\pi}{2},0)}$

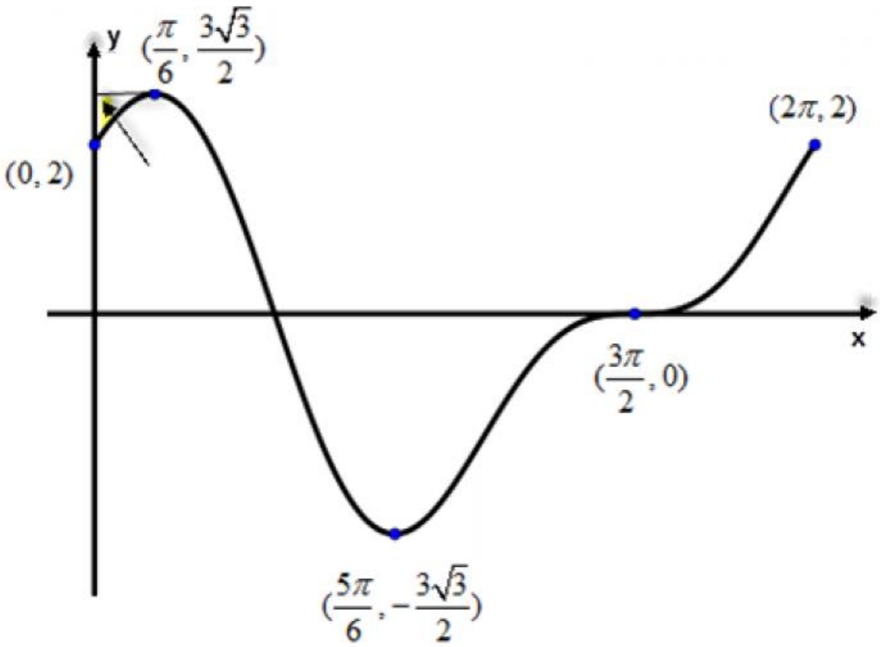
**נבנה טבלה לזיהוי נקודות קיצון, בעזרת ערכי הפונקציה .**

| $x$ | 0 | | $\frac{\pi}{6}$ | | $\frac{5\pi}{6}$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | | $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | | 0 | | 2 |
| **מסקנה** | Min | ↗ | Max | ↘ | Min | ↗ | **פיתול** | ↗ | Max |

**תשובה:** $(0,2)$ **,** $(\frac{5\pi}{6},-\frac{3\sqrt{3}}{2})$ **מינימום ,** $(2\pi,2)$ **,** $(\frac{\pi}{6},\frac{3\sqrt{3}}{2})$ **מקסימום.**



ג. משיק לגרף הפונקציה, בנקודת קיצון פנימית, הוא פונקציה קבועה ולכן משוואתו $y=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .




השטח המבוקש מסומן בחץ.

$$S=\int_{0}^{\frac{\text{®}}{6}}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-(\sin 2x+2\cos x)\right)dx$$

$$S=\int_{0}^{\frac{\text{®}}{6}}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sin 2x-2\cos x\right)dx$$

$$S=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x+\frac{\cos 2x}{2}-2\sin x\right)\Big]_{0}^{\frac{\text{®}}{6}}$$

$$x=\frac{\text{®}}{6}:\quad \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\text{®}}{6}+\frac{\cos(2\cdot\frac{\text{®}}{6})}{2}-2\sin\frac{\text{®}}{6}=0.6103$$

$$x=0:\quad \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 0+\frac{\cos(2\cdot 0)}{2}-2\sin 0=0.5$$

$$S=0.6103-0.5\quad\rightarrow\boxed{S=0.1103}$$

תשובה: גודל השטח הוא $0.1103$ .

**א. נתונה הפונקציה $f(x)=\ell n(2x-ax^2)$ ( $a$ הוא פרמטר).**

**שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא $\frac{2}{3}$ , ולכן $f'(1)=\frac{2}{3}$ .**

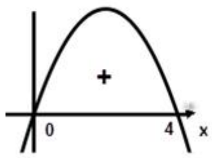
$$f'(x)=\frac{2-2ax}{2x-ax^2}$$
$$\frac{2}{3}=\frac{2-2a\cdot 1}{2\cdot 1-a\cdot 1^2}$$
$$\frac{2}{3}=\frac{2-2a}{2-a}$$
$$2(2-a)=3(2-2a)$$
$$4-2a=6-6a$$
$$4a=2$$
$$\boxed{a=\frac{1}{2}}$$

**תשובה: $a=\frac{1}{2}$.**

**ב. נציב $a=\frac{1}{2}$ והפונקציה היא $f(x)=\ell n(2x-\frac{1}{2}x^2)$ .**

**נמצא את תחום ההגדרה: פונקציית ה- $\ell n$ יכולה לקבל מספרים חיוביים בלבד.**

$$2x-\frac{1}{2}x^2>0$$
$$4x-x^2>0$$
$$x(4-x)>0$$

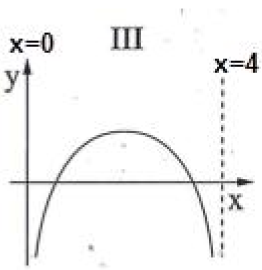



**הגרף הוא של פרבולה הפוכה,**

**המתאפסת עבור $x=0,\ x=4$ , וחיובית בתחום $0<x<4$ .**

**תשובה: $0<x<4$.**

**ג. נציב שני ערכי $x$ , ונוכל לזהות את הגרף המתאים.**




$$f(0.00001)=\ell n(2\cdot 0.00001-\frac{1}{2}\cdot 0.00001^2)=-10.82$$
$$f(3.99999)=\ell n(2\cdot 3.99999-\frac{1}{2}\cdot 3.99999^2)=-5.92$$

**ולכן הגרף המתאים הוא גרף III , שהוא שלילי בנקודות אלו,**

**וכמובן תחום ההגדרה תואם $0<x<4$ וגם שתי האסימפטוטות האנכיות $x=0,\ x=4$ .**

**ניתן לזהות גם שכאשר $x=1$ הגרף בעלייה, ומתאים לשיפוע חיובי ( $\frac{2}{3}$).**

**תשובה: גרף III .**