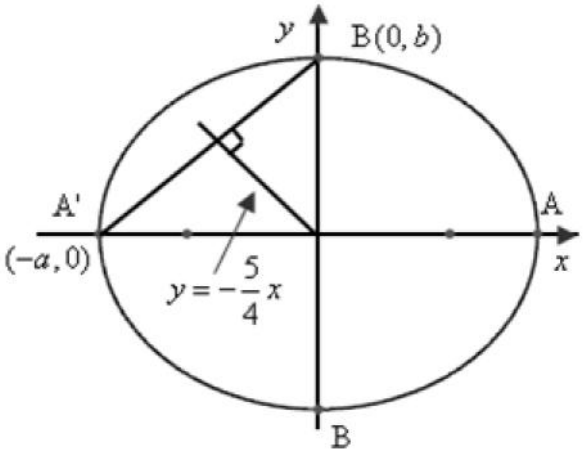
א. נתונה משוואת האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **.**



שיעורי הנקודות B, A' **שעל הצירים:** $B(0,b),\quad A'(-a,0)$

והשיפוע ביניהן: $m_{A'B}=\frac{b-0}{0+a}=\frac{b}{a}$

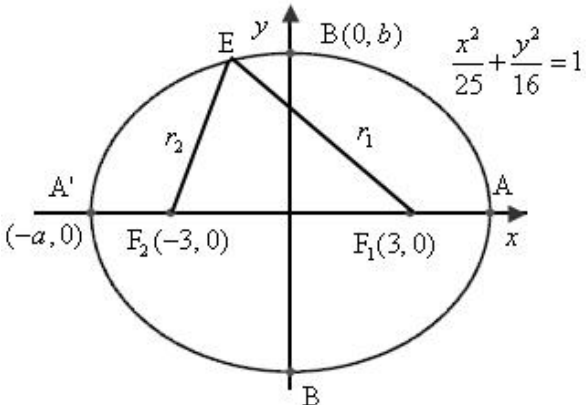
משוואת הישר המאונך לישר $A'B$ **היא** $y=-\frac{5}{4}x$ **,**

ולכן על פי תנאי ניצבות $m_{A'B}=\frac{4}{5}$ **.**

מרחק הנקודה B **לאחד המוקדים הוא** 5 **,**

ובהתאם לנוסחת מרחק $5=\sqrt{(0-c)^2+(b-0)^2}\quad\leftarrow\quad b^2+c^2=25$ **.**

באליפסה מתקיים $a^2=b^2+c^2$ **ולכן** $a=5$ **ומכאן ש-** $b=4$ **.**



(ניתן גם המרחק מהמוקד הוא רדיוס וקטור $r_1=r_2=5$ **,**

משיקולי סימטריה של הנקודה B **למוקדים,**

ומכיוון ש- $r_1+r_2=2a$ **נקבל ש-** $a=5$ **.**

תשובה: משוואת האליפסה היא $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ **.**

ב. סכום מרחקי נקודה שעל האליפסה משני המוקדים קבוע ושווה ל $2a$ **.**

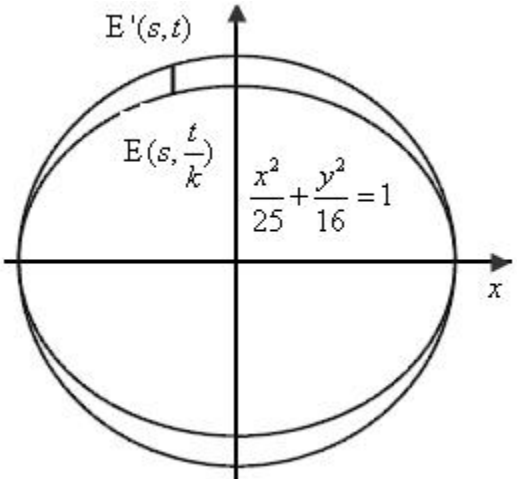
($r_1+r_2=2a$**)**

אורך הצלע שבין המוקדים שווה ל- $2c$ **,** $c^2=a^2-b^2=9\quad\leftarrow\quad c=3$ **.**

בהתאם, היקף המשולש הוא $10+2\cdot3=16$ **.**

תשובה: היקף המשולש EF_1F_2 **הוא** 16 **יחידות.**

ג. (1) אם נקרב את שני מוקדי האליפסה, כאשר הציר הגדול קבוע, הרי שהאליפסה תימתח ($k>1$),
ובמקרה שהמוקדים יתלכדו זה עם זה, נקבל ש $a=b$ והאליפסה תהפוך למעגל קנוני $x^2+y^2=25$.



נסמן את שיעורי הנקודה שעל האליפסה החדשה $E'(s,t)$.

EE' מקביל לציר ה- y ולכן $x_E=x_{E'}=s$,

כאשר על פי הנתון $y_E=\frac{y_{E'}}{k}=\frac{t}{k}$.

נציב את שיעורי הנקודה $E(s,\frac{t}{k})$ במשוואת האליפסה

ונקבל $\frac{s^2}{25}+\frac{t^2}{16k^2}=1$.

תשובה: משוואת האליפסה החדשה היא $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16k^2}=1$

(2) על פי ההסבר בתחילת הסעיף הקודם $16k^2=25$ ומכאן ש: $k=1.25$ $\rightarrow k>1$.

תשובה: $k=1.25$

א. נתונה הפרבולה $y^2=2px$ כאשר המיתר AB עובר דרך מוקד הפרבולה $F(\frac{p}{2},0)$.

המרחק של כל נקודה שעל הפרבולה מהמוקד שווה למרחקה מהמדריך $x=-\frac{p}{2}$.

לכן $AF=AT$, ו- $BF=BC$ (בסיסי הטרפז מקבילים לצירים ומאונכים למדריך).

בהתאם, על פי כלל החיבור $AB=AT+BC$.

תשובה: הוכַח.

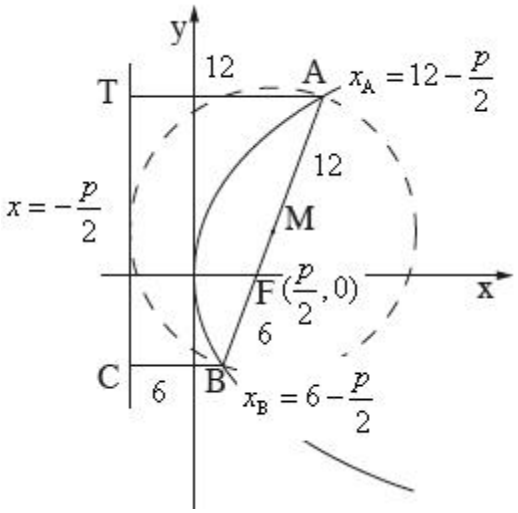
ב. מרחק הנקודה M מהמדריך הוא אורך האנך מהנקודה למדריך,

ולכן האנך מקביל לבסיסים, כאשר M אמצע הקוטר של המעגל.

נקבל שהאנך הוא קטע אמצעים בטרפז ושווה למחצית סכום הבסיסים $\frac{AT+BC}{2}$,

כלומר למחצית הקוטר, על פי סעיף א, ומכאן שהוא שווה לרדיוס המעגל.

תשובה: הוכַח.



ג. נתון כי 6 ס"מ $BC=$ ו- 12 ס"מ $AT=$

(1) קוטר המעגל 18 ס"מ $AB=$, על פי סעיף א.

6 ס"מ $BF=BC=$, 12 ס"מ $AF=AT=$,

ולכן F מחלקת את AB

ביחס של $BF:AF=1:2$.

תשובה: F מחלקת את AB ביחס של $1:2$.

(2) $6=x_B-x_C\rightarrow x_B=6-\frac{p}{2}$

תשובה: $x_B=6-\frac{p}{2}$

(3) בצורה דומה $12=x_A-x_T\rightarrow x_A=12-\frac{p}{2}$

ועל פי נוסחת חלוקת קטע ביחס נתון, כאשר $F(\frac{p}{2},0)$ מחלקת את AB ביחס של $1:2$

$$\frac{p}{2}=\frac{1\cdot(12-\frac{p}{2})+2\cdot(6-\frac{p}{2})}{3}$$

$$3p=24-p+24-2p$$

$$6p=48$$

$$p=8$$

תשובה: משוואת הפרבולה היא $y^2=16x$.

א. משוואת מישור בסיס הפירמידה, $2x+2y-z-4=0$

הצגה פרמטרית של הישר TB **היא:** $\underline{x}=(1,2,-7)+t(3,2,1)$

כלומר נקודה טיפוסית עליו היא $(1+3t,\ 2+2t,-7+t)$**.**

למציאת שיעורי הקדקוד B **נציב את שיעורי הנקודה במשוואת מישור הבסיס.**

$2\cdot(1+3t)+2\cdot(2+2t)-(-7+t)-4=0 \quad \rightarrow t=-1 \quad \rightarrow \boxed{B(-2,\ 0,-8)}$**.**

תשובה: B(-2, 0, −8)

ב. בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=z=0$

ואם נציב במשוואת המישור נקבל: $2x+2\cdot0-0-4=0 \quad \rightarrow x=2 \quad \rightarrow (2,\ 0,\ 0)$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- z **מתקיים** $x=y=0$

ואם נציב במשוואת המישור נקבל: $2\cdot0+2\cdot0-z-4=0 \quad \rightarrow z=-4 \quad \rightarrow (0,\ 0,-4)$

כיוון שאלכסוני המקבילית חוצים זה את זה, הרי ששיעורי $M(0,\ 0,-4)$**,** **ו-** $D(2,\ 0,\ 0)$**,**

ובמקרה זה נקבל $M(\frac{2-2}{2},\frac{0+0}{2},\frac{0-8}{2})$**.**

תשובה: הנקודה D **נמצאת על ציר ה-** x**.**

ג. (1) הישר BE **מאונך לאנך למישור היורד מהישר** TB**,**

כלומר הווקטור $\overrightarrow{BE}$ **מאונך לווקטור** $\underline{x}=(2,\ 2,-1)$ **, ווקטור הנורמל של המישור.**

הנקודה $(1,\ 2,-7)$ **נמצאת על הישר** TB**, כאשר ווקטור המקדמים של משוואת המישור הוא נורמל לבסיס,**

לכן הצגה פרמטרית של האנך למישור היא $\underline{x}=(1,\ 2,-7)+p(2,\ 2,-1)$

כלומר נקודה טיפוסית עליו (כמו הנקודה E**) היא** $(1+2p,\ 2+2p,-7-p)$**.**

$\overrightarrow{BE}=\underline{E}-\underline{B}=\underline{x}=(3+2p,\ 2+2p,1-p)$**.**

המכפלה הסקלרית של ווקטורים מאונכים שווה ל- 0**:** $(3+2p,\ 2+2p,1-p)\ (2,2,-1)=0$**,**

ומכאן $p=-1 \ \leftarrow$ **כאשר** $\overrightarrow{BE}=(1,\ 0,\ 2)$**,** $E(-1,\ 0,-6)$**.**

תשובה: הצגה פרמטרית של הישר BE **היא** $\underline{x}=(-2,\ 0,-8)+p(1,\ 0,\ 2)$ **.**

(2) $\overrightarrow{BD}=\underline{D}-\underline{B}=\underline{x}=(4,\ 0,\ 8)$**, וקל לראות שזהו וקטור עם כיוון זהה לווקטור** $\underline{(1,\ 0,\ 2)}$**.**

לשני הישרים, BE **ו-** BD**, נקודה משותפת** B**, ולכן הם מתלכדים.**

תשובה: הישר BE **מתלכד עם האלכסון** BD**.**

א. נתונה פונקציות הנגזרות $g'(x)=e^{f(x)}(x-\frac{3}{2})$ **, ו-** $f'(x)=2x-3$ **כאשר הפונקציות הקדומות מוגדרת לכל** x **.**

(1) ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ **בנקודת הקיצון, כלומר פונקציה קבועה,** $y=-0.25$ **,**

חותך את ציר ה- y **עבור** $y=-0.25$ **, כלומר זה שיעור ה-** y **בנקודת הקיצון.**

$f'(x)=2x-3$ **מתאפסת עבור** $x=1.5$ **, כאשר עוברת בנקודה זו משליליות חיוביות,**

ולכן שיעורי נקודת המינימום של $f(x)$ **הם** $(1.5,-0.25)$ **.**

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2x-3)\,dx=x^2-3x+c$$

$$-0.25=1.5^2-3\cdot1.5+c \quad \rightarrow c=2 \quad \rightarrow \boxed{f(x)=x^2-3x+2}$$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **, לכן** $g'(0)=e^{0^2-3\cdot0+2}(0-1.5)=-1.5e^2$ **ובהתאם** $(0,-1.5e^2)$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **, לכן שיעורי נקודת החיתוך** $(1,5,0)$ **, כי** $e^{f(x)}$ **חיובי לכל** x **.**

תשובה: שיעורי נקודות החיתוך של $g'(x)$ **עם הצירים הם:** $(0,-1.5e^2)$ **,** $(1,5,0)$ **.**

(2) נמצא תחומי עלייה וירידה של $g'(x)=e^{x^2-3x+2}(x-1.5)$ **(תחומי קעירות של** $g(x)$ **)**

$$g''(x)=(2x-3)e^{x^2-3x+2}(x-1.5)+e^{x^2-3x+2}$$

$$g''(x)=e^{x^2-3x+2}(2(x-1.5)^2+1)$$

כיוון ששני הכופלים של פונקציית הנגזרת של $g'(x)$ **חיוביים לכל** x **, הרי שהפונקציה** $g'(x)$ **עולה לכל** x **.**

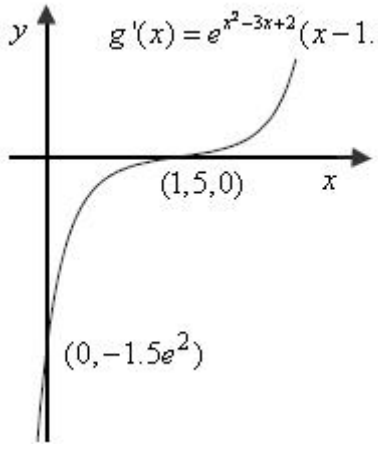
תשובה: עלייה: כל x **, ירידה: אף** x **.**

(3) נתון כי $g'''(x)<0$ **עבור** $x<1.5$ **לכן בתחום זה** $g'(x)$ **קעורה כלפי מטה.**

נתון כי $g'''(x)>0$ **עבור** $x>1.5$ **לכן בתחום זה** $g'(x)$ **קעורה כלפי מעלה.**

כלומר $(1,5,0)$ **היא נקודת פיתול של** $g'(x)$ **.**

סרטוט סקיצה:



ב. לישר $y=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}+1$ **ולפונקציה** $g(x)$ **יש נקודה משותפת אחת.**

על פי הסעיף הקודם, פונקציית הנגזרת $g'(x)$ **עוברת משליליות לחיוביות עבור** $x=1.5$ **,**

כלומר זה שיעור ה- x **של נקודת המינימום היחידה של** $g(x)$ **, המוגדרת לכל** x **, ולכן זהו מינימום מוחלט.**

מכאן ששיעור ה- y **של נקודה זו הוא** $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}+1$ **, כי עבור כל** y **גדול יותר יהיו שתי נקודות חיתוך עם פונקציה קבועה, ועבור כל** y **קטן מזה לא תהיינה נקודות חיתוך עם פונקציות קבועות.**

ולכן שיעורי נקודת המינימום של $g(x)$ **הם** $(1.5,\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}+1)$ **.**

$$g(x)=\int g'(x)\,dx=\int (e^{x^2-3x+2}(x-1.5))\,dx=0.5e^{x^2-3x+2}+c$$

$$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}+1=0.5e^{1.5^2-3\cdot 1.5+2}+c$$

$$0.5e^{-\frac{1}{4}}+1=0.5e^{-\frac{1}{4}}+c \quad \to c=1 \quad \to \boxed{g(x)=0.5e^{x^2-3x+2}+1}$$

תשובה: $g(x)=0.5e^{x^2-3x+2}+1$ **.**

(1) $z=a+bi$ **הוא מספר מרכוב הנמצא ברביעי הרביעי (**$a>0,\ b<0$**).**

הערך המוחלט של z **הוא** 1 **ולכן** $a^2+b^2=1$**.**

$$\left|1+\frac{1}{z}\right|=\sqrt{3}$$

$$\left|1+\frac{1}{a+bi}\right|=\sqrt{3}$$

$$\left|1+\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}\right|=\sqrt{3}$$

$$\left|1+\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right|=\sqrt{3} \qquad \rightarrow \left|1+\frac{a-bi}{1}\right|=\sqrt{3}$$

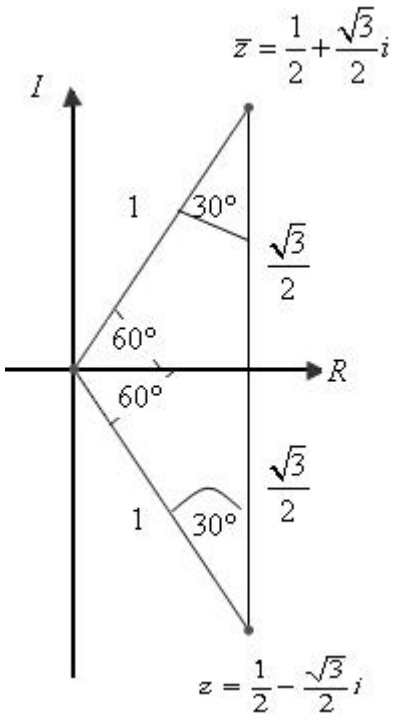
$$|1+a-bi|=\sqrt{3} \quad \rightarrow (1+a)^2+b^2=3$$

$$1+2a+a^2+b^2=3 \quad \rightarrow 1+2a+1=3$$

$$2a=1$$

$$a=\frac{1}{2} \quad \rightarrow (\frac{1}{2})^2+b^2=1 \quad \rightarrow b=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \leftarrow b<0$$

$$\boxed{z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i} \quad \rightarrow \boxed{\overline{z}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$



המשולש $O\,z_1\overline{z}$ **הוא שווה שוקיים, כאשר צלע אחת מקבילה לציר ה-** y **(שיעורי** x **שווים),**

ואורכי שתי הצלעות האחרות שווים ל- 1 **כי** z **ו-** $\overline{z}$ **נמצאים על מעגל היחידה.**

$$\tan\sphericalangle_{\overline{z}}=\frac{0.5\sqrt{3}}{0.5}=\sqrt{3}\rightarrow\sphericalangle_{\overline{z}}=60° \quad (0°<\sphericalangle_{\overline{z}}<90°)$$

ובהתאם זוויות המשולש הן $120°, 30°, 30°$**, כי ציר ה-** x **חוצה את זווית הראש, וזוויות בסיס שוות במש"ש.**

תשובה: זוויות המשולש: $120°, 30°, 30°$**.**

(2) אורך הצלע המקבילה לציר ה- y **:** $\frac{\sqrt{3}}{2}-(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}$ **, ואורכי הצלעות האחרות** 1 **על פי סעיף (1).**

תשובה: אורכי צלעות המשולש: $\sqrt{3}$ **,** 1 **,** 1**.**

(1) נתונות הפונקציות $f(x)=-\ell n\,x$ **,** $g(x)=\ell n\,(-x)$ **-ו**

הביטוי שמקבלת פונקציה לוגריתמית הוא חיובי, לכן תחומי ההגדרה בהתאם.

עבור $f(x)$ **:** $x>0$ **, ועבור** $g(x)$ **:** $-x>0\rightarrow x<0$ **.**

תשובה: $f(x)$ **:** $x>0$ **,** $g(x)$ **:** $x<0$ **.**

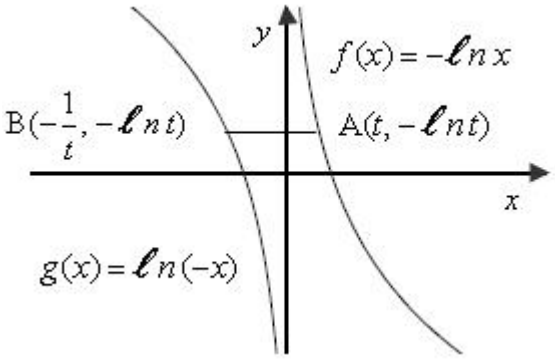
(2) הפונקציה שיש להביא ל*אינימום* היא אורך הקטע AB **.**

נסמן ב- t **את שיעור ה-** x **של הנקודה** A,

בהתאם שיעורי הנקודה A **שעל** $f(x)=-\ell n\,x$ **הם** $\mathrm{A}(t,-\ell n\,t)$

נציב בתבנית הפונקציה $g(x)=\ell n\,(-x)$ **ונפתור את המשוואה המתאימה:**

$$-\ell n\,t=\ell n\,(-x)$$
$$\ell n\,t^{-1}=\ell n\,(-x)$$
$$t^{-1}=-x$$
$$x_{\mathrm{B}}=-\frac{1}{t}$$



ולכן שיעורי הנקודה B **שעל** $g(x)=\ell n\,(-x)$ **הם** $\mathrm{B}(-\frac{1}{t},-\ell n\,t)$

מכיוון ו- AB **מאונך לציר ה-** y **, הרי ש:** $\mathrm{AB}=x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}}=t-(-\frac{1}{t})$

$$\boxed{\mathrm{AB}=t+\frac{1}{t},\quad t>0}$$

$$\boxed{(\mathrm{AB})'(t)=1-\frac{1}{t^2}}$$

$$0=1-\frac{1}{t^2}$$
$$0=t^2-1$$
$$\boxed{t=1}\quad\leftarrow t>0$$
$$(\mathrm{AB})''(t)=+\frac{2}{t^3}\quad\rightarrow(\mathrm{AB})''(1)=\frac{2}{1^3}>0\quad\rightarrow\min$$

$$\boxed{\mathrm{AB}(1)=1+\frac{1}{1}=2}$$

במקרה זה הקטע AB **מתלכד עם ציר ה-** x **.**

תשובה: האורך המינימלי של הקטע AB **הוא** 2 **יחידות.**