א. נתונות שתי סדרות הנדסיות אין-סופיות.

כיוון שנתון סכום של כל אחת מהן, וכל אחת מהן אין-סופית, הרי שמדובר בסדרות מתכנסות,

ולכן $-1<q<1$ **, ונוסחת הסכום של אין-סוף איברי הסדרה היא** $S=\frac{a_1}{1-q}$ **.**

נרכז בטבלה את הנתונים שלהן (מומלץ תמיד), ונעדכן אותה גם במהלך התרגיל.

	a_n	b_n
A_1	a_1	$b_1=a_1$
Q	$q=\frac{1}{15}$	$3q=3\cdot\frac{1}{15}=0.2$
N	∞	∞
S	$S=\frac{a_1}{1-q}$	$T=\frac{a_1}{1-3q}$

נתון $\frac{S}{T}=\frac{6}{7}$ **.**

נציב על ידי חילוק בהופכי

$$\frac{a_1}{1-q}\cdot\frac{1-3q}{a_1}=\frac{6}{7}$$

$$\frac{1-3q}{1-q}=\frac{6}{7}$$

$$7-21q=6-6q$$

$$1=15q$$

$$\boxed{q=\frac{1}{15}}$$

תשובה: $q=\frac{1}{15}$ **.**

ב. נתון $a_4=5$.

$$a_1q^3=5$$

$$a_1\left(\frac{1}{15}\right)^3=5 \quad /:\left(\frac{1}{15}\right)^3$$

$$\boxed{a_1=16875}$$

ולכן גם $\boxed{b_1=16875}$

$$b_4=b_1\cdot q_b^3$$

$$b_4=16875\cdot 0.2^3$$

$$\boxed{b_4=135}$$

<u>דרך חלופית</u>

$$b_4=b_1\cdot q_b^3$$

$$b_4=a_1\cdot(3q)^3$$

$$b_4=27a_1q^3$$

$$b_4=27a_4$$

$$a_4=27\cdot 5$$

$$\boxed{b_4=135}$$

תשובה: $b_4=135$

א. נתונה קובייה $ABCDA'B'C'D'$ **, שאורך מקצועותיה השווים הוא** a **.**

לקובייה שש פאות, שהן ריבועים חופפים.

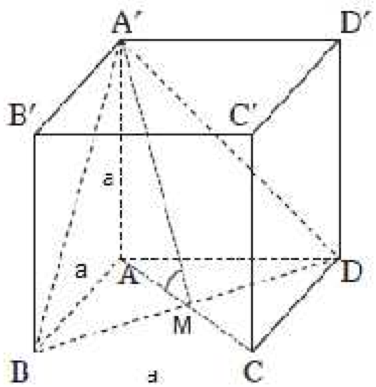
כל אחת, משלוש הצלעות של $\Delta A'BD$ **, היא אלכסון של אחת מהפאות החופפות,**

ולכן $\Delta A'BD$ **הוא משולש שווה צלעות.**

תשובה: הוכחנו.

ב. $A'M$ **הוא גובה ב-** $\Delta A'BD$, **ולכן הוא גם תיכון לצלע, לאלכסון הבסיס** BD **.**

$\sphericalangle AMA'$ **היא הזווית שבין** $A'M$ **למישור** $ABCD$ **, כאשר** AM **הוא ההיטל של** $A'M$ **למישור.**



ΔABC **על פי משפט פיתגורס:**

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(AC)^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\boxed{AC = a\sqrt{2}}$$

AM **הוא גם חצי מאלכסון הריבוע:**

$$\boxed{AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

: $\underline{\Delta AMA'}$

$$\tan \sphericalangle AMA' = \frac{AA'}{AM} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\boxed{\sphericalangle AMA' = 54.74°}$$

תשובה: גודל הזווית שבין $A'M$ **ובין הפאה** $ABCD$ **הוא** $54.74°$ **.**

ג. נתון: $S_{\Delta A'BD}=8\sqrt{3}$.

(1) נחשב את a .

$$S_{\Delta A'BD}=8\sqrt{3}$$
$$\frac{(a\sqrt{2})^2\sin 60^\circ}{2}=8\sqrt{3}$$
$$\frac{2a^2\sin 60^\circ}{2}=8\sqrt{3}$$
$$a^2=16$$
$$\boxed{a=4}\quad\leftarrow a>0$$

תשובה: $a=4$.

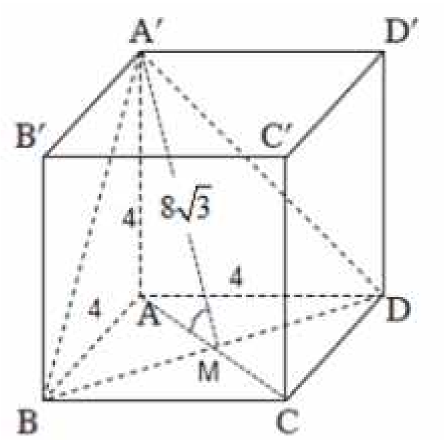
(2) $AA'BD$ **היא פירמידה ישרה, כאשר** $AA'=AD=AB=4$ **, ו-** A **הוא קדקוד זווית הראש.**

שלוש הפאות הצדדיות, החופפות, מונחות על פאות הקוביה, ושטח כל אחת מהן הוא $8=\frac{4\cdot4}{2}$**.**

בסיס הפירמידה הוא $\Delta A'BD$ **, ששטחו ידוע, והוא** $8\sqrt{3}$.

שטח הפנים של הפירמידה הוא: $3\cdot8+8\sqrt{3}=8(3+\sqrt{3})\approx37.86$**.**

תשובה: שטח הפנים של הפירמידה $AA'BD$ **הוא:** $8(3+\sqrt{3})\approx37.86$**.**



א. נתונה הפונקציה $f(x)=2\sin x+\cos 2x$, **המוגדרת בתחום** $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ **.**

נקודות קצה: $(0,1)$ **,** $(\frac{\pi}{2},1)$ **. (תמיד מומלץ להתחיל עם נקודות קצה, אם קיימות, שתהיינה גם נקודות קיצון.)**

$$\boxed{f'(x)=2\cos x-2\sin 2x}$$

$$0=2\cos x-2\sin 2x$$

$$0=2\cos x-4\sin x\cos x$$

$$0=2\cos x\,(1-2\sin x)$$

$$\cos x=0=\cos\frac{\pi}{2} \qquad \sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k \quad x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k \quad x=\frac{\pi}{6}+2\pi k \quad x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$$

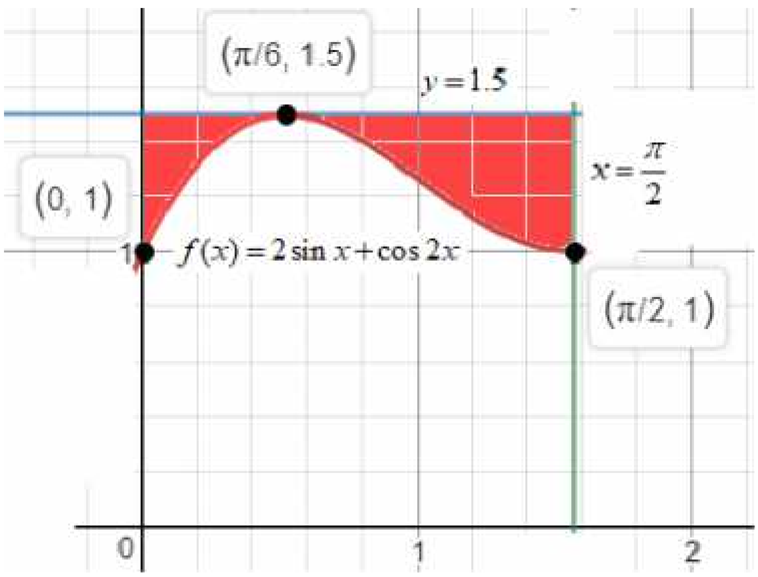
$x=\frac{\pi}{6}$ **הוא הפתרון הפנימי היחידי.** $\boxed{(\frac{\pi}{6},1.5)}\leftarrow$ $f(\frac{\pi}{6})=2\sin(\frac{\pi}{6})+\cos(2\cdot\frac{\pi}{6})=1.5$

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, וסוג הקיצון, בעזרת ערכי הפונקציה:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$	1		1.5		1
מסקנה	Min	↗	Max	↘	Min

תשובה: $(\frac{\pi}{2},1)$ **מינימום ,** $(\frac{\pi}{6},1.5)$ **מקסימום ,** $(0,1)$ **מינימום.**

ב. הסקיצה המתאימה (כולל סימון השטח, עבור סעיף ג):



ג. (1) משוואת המשיק, בנקודת מקסימום פנימי, היא של פונקציה קבועה $y = 1.5$ **.**

תשובה: $k = 1.5$ **.**

(2) נחשב את השטח, הצבוע באדום, כאשר בשני חלקיו, הפונקציה העליונה היא $y = 1.5$ **,**
והפונקציה התחתונה היא $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ **.**

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1.5 - (2\sin x + \cos 2x))\, dx$$

$$S = \int_0^{\pi} (1.5 - 2\sin x - \cos 2x)\, dx$$

$$S = (1.5x + 2\cos x - \frac{\sin 2x}{2})\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$x = \frac{\pi}{2}: \quad 1.5 \cdot \frac{\pi}{2} + 2\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(2 \cdot \frac{\pi}{2})}{2} = \frac{3}{4}\pi$$

$$x = 0: \quad 1.5 \cdot 0 + 2\cos 0 - \frac{\sin(2 \cdot 0)}{2} = 2$$

$$\boxed{S = \frac{3}{4}\pi - 2 \approx 0.356}$$

תשובה: גודל השטח הוא $\frac{3}{4}\pi - 2 \approx 0.356$ **יח"ר.**

א. (1) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a-e^x}{e^{2x}}$ **(** $a>0$ **הוא פרמטר).**

מכנה הפונקציה חיובי לכל x.

תשובה: תחום ההגדרה הוא כל x **.**

(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **:** $\boxed{(0,a-1)}\rightarrow \quad f(0)=\frac{a-e^0}{e^{2\cdot 0}}=a-1$ **.**

בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$\frac{a-e^x}{e^{2x}}=0$$
$$a-e^x=0$$
$$a=e^x \quad \rightarrow \boxed{(\ell n\, a,\, 0)}$$

תשובה: $(0,a-1)$ **,** $(\ell n\, a,\, 0)$**.**

ב. נתון: גרף הפונקציה $f(x)$ **עובר בראשית הצירים, ולכן:** $f(0)=0$ **.**

$$\ell n\, a=0$$
$$\boxed{a=1}$$

תשובה: $a=1$**.**

ג. נציב $a=1$**, ונקבל** $f(x)=\frac{1-e^x}{e^{2x}}$ **.**

כאשר $x\rightarrow+\infty$**, למשל** $f(10)=\frac{1-e^{10}}{e^{2\cdot 10}}=-4.5\cdot 10^{-5}\rightarrow 0^-$ **, ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

כאשר $x\rightarrow-\infty$ **, למשל** $f(-10)=\frac{1-e^{-5}}{e^{2\cdot(-5)}}=21{,}878\rightarrow+\infty$ **. ואין אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

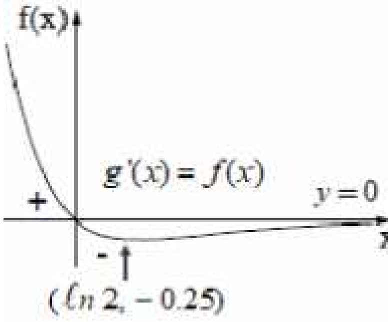
(1) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

$$f'(x)=\frac{-e^x e^{2x}-2e^{2x}(1-e^x)}{(e^{2x})^2}$$
$$f'(x)=\frac{e^{2x}\left[-e^x-2(1-e^x)\right]}{(e^{2x})^2}$$
$$f'(x)=\frac{-e^x-2+2e^x}{e^{2x}}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{e^x-2}{e^{2x}}}$$
$$e^x=2 \quad \rightarrow \boxed{(\ell n\, 2,\, -0.25)}$$

על פי ערכי הפונקציה מימין $(5,-4.5\cdot 10^{-5})$ **ומשמאל** $(0,0)$ **מתקבל ש-** $(\ell n\, 2,\, -0.25)$ **מינימום.**

תשובה: $(\ell n\, 2,\, -0.25)$ **מינימום .**

(2) סרטוט של גרף הפונקציה.



ד. הפונקציה $g(x)$ **, מקיימת** $g'(x) = f(x)$ **.**

בנקודה, שבה $x = 0$ **, עוברת** $g'(x)$ **מחיוביות לשליליות, ובהתאם** $g(x)$ **עוברת מעלייה לירידה.**

תשובה: $x = 0$ **, מקסימום.**

א. נתונה הפונקציה $\boxed{f(x)=\frac{\ell n\,x^2}{x^2}}$ **.**

(1) בתחום ההגדרה, הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית גדול מאפס, לכן $x^2\neq 0 \quad \to x\neq 0$ **.**

בתחום ההגדרה, המכנה שונה מאפס, לכן $x\neq 0$ **.**

תשובה: $x\neq 0$ **.**

(2) כאשר $x\to 0$ **, למשל** $f(\pm 0.01)=-92103\to -\infty$ **, ו-** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

(כאשר $x\to\infty$ **, למשל** $f(\pm 1000)=1.3\cdot 810^{-5}\to 0$ **, ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין ולשמאל.)**

תשובה: $x=0$ **.**

(3) $x=0$ **לא בתחום ההגדרה, ולכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה-** y **.**

בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **:**

$$\ell n\,x^2=0$$
$$x^2=1$$
$$\boxed{(1,0)\,,\,(-1,0)}$$

תשובה: $(1,0)$ **,** $(-1,0)$**.**

(4) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגן.

$$f'(x)=\frac{\frac{2x\cdot x^2}{x^2}-2x\ell n\,x^2}{x^4}$$

$$f'(x)=\frac{2x-2x\ell n\,x^2}{x^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2x(1-\ell n\,x^2)}{x^4}}$$

$$1-\ell n\,x^2=0 \qquad \cancel{x=0}$$

$$\ell n\,x^2=1$$

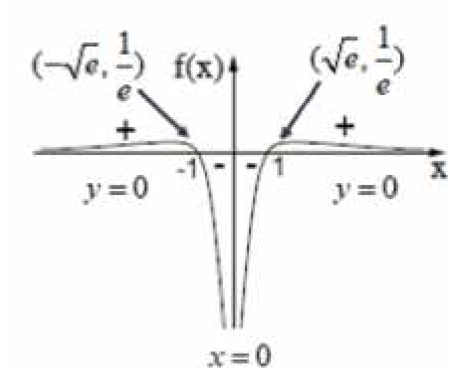
$$x=\pm\sqrt{e}$$

$$f(\pm\sqrt{e})=\frac{\ell n\,(\pm\sqrt{e})^2}{(\pm\sqrt{e})^2}=\frac{\ell n\,e}{e}=\frac{1}{e}\quad\to \boxed{(\sqrt{e},\frac{1}{e})}\quad \boxed{(-\sqrt{e},\frac{1}{e})}$$

על פי ערכי הפונקציה, שמצאנו בסעיף א, שתי נקודות אלו הן נקודות מקסימום.

תשובה: $(\sqrt{e},\frac{1}{e})$ **מקסימום ,** $(-\sqrt{e},\frac{1}{e})$ **מקסימום .**

(5) הסקיצה המתאימה של $f(x)=\frac{\ell n\, x^2}{x^2}$, כולל סימון עבור תת-סעיף א(6).

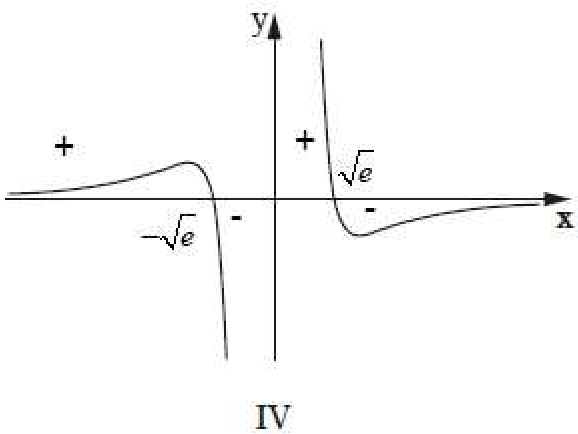


(6) תשובה: חיוביות $x>1$, או $x<-1$. שליליות $0<x<1$, או $-1<x<0$ (אפשר גם $-1<x<-1,\ x\neq 0$).

ב. רצוי לתת לפחות שלושה נימוקים לגרף המתאים.

- **בנקודה שבה $x=\sqrt{e}$ עוברת הפונקציה מעלייה לירידה, וגרף הנגזרת מחיובי לשלילי.**
- **בנקודה שבה $x=-\sqrt{e}$ עוברת הפונקציה מעלייה לירידה, וגרף הנגזרת מחיובי לשלילי.**
- **$f(x)=\frac{\ell n\, x^2}{x^2}$ פונקציה זוגית, סימטרית לציר ה- y .**

$f'(x)=\frac{2x(1-\ell n\, x^2)}{x^4}$ פונקציה אי-זוגית, סימטרית לראשית הצירים.



IV

תשובה: גרף IV הוא הגרף של פונקציית הנגזרת, $f'(x)$.