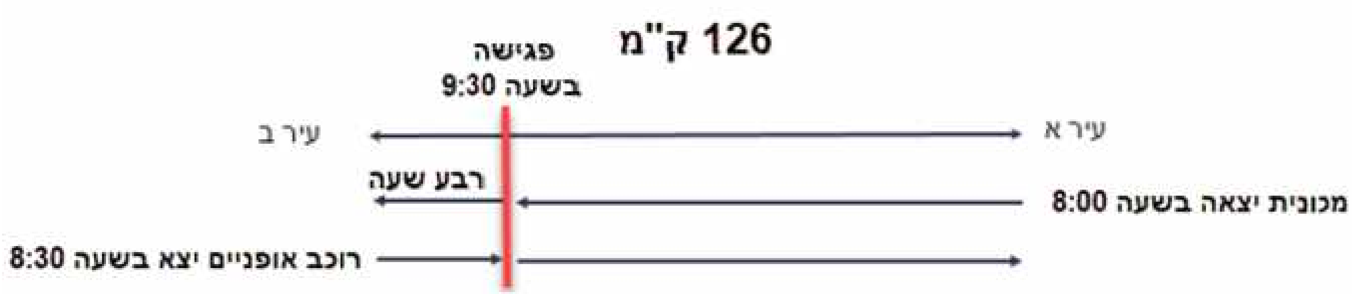
א. נסמן את מהירות הנסיעה של המכונית ב- x **(קמ"ש) .**

נסמן את מהירות הנסיעה של רוכב האופניים ב- y **(קמ"ש) .**



		זמן (שעות)	מהירות (ק"מ לשעה)	דרך-מרחק (ק"מ)
מהתחלה	**מכונית**	1.5	x	$1.5x$
עד המפגש	**רוכב אופניים**	1	y	y
מהמפגש עד עיר ב	**מכונית**	$\frac{15}{60}=0.25$	x	$0.25x$

עד המפגש עברו כלי הרכב 126 **ק"מ ביחד. המשוואה המתאימה:** $1.5x+y=126$**.**

לאחר המפגש עברה המכונית את המרחק, שעבר רוכב האופניים לפני המפגש. המשוואה המתאימה: $y=0.25x$ **.**

נפתור את מערכת המשוואות.

$$\begin{cases}1.5x+y=126\\ y=0.25x\end{cases}$$

$$1.5x+0.25x=126$$

$$1.75x=126 \quad /:1.75$$

$$\boxed{x=72} \quad \rightarrow y=0.25\cdot 72 \quad \rightarrow \boxed{y=18}$$

תשובה: מהירות המכונית הייתה 72 **קמ"ש, ומהירות האופנוע הייתה** 18 **קמ"ש.**

ב. נבנה טבלה מעודכנת, עבור סעיף ב.

		זמן (שעות)	מהירות (קמ"ש לשעה)	דרך-מרחק (ק"מ)
מהתחלה עד המפגש	**מכונית**	t	$72+a$	$t(72+a)$
	רוכב אופניים	t	$18-a$	$t(18-a)$

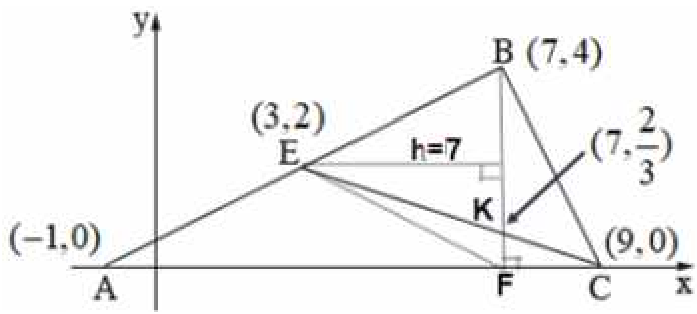
עד המפגש עברו כלי הרכב 126 **ק"מ ביחד. המשוואה המתאימה:** $t(72+a)+t(18-a)=126$**.**

נמצא את t**.**

$$t(72+a)+t(18-a)=126$$
$$72t+ta+18t-ta=126$$
$$90t=126 \quad /:90$$
$$\boxed{t=1.4}$$

תשובה: $t=1.4$**.**

א. CE **הוא תיכון לצלע** AB **. נמצא את שיעורי הנקודה** E **, באמצעות נוסחת אמצע קטע.**



$$E(\frac{-1+7}{2},\frac{0+4}{2}) \quad \rightarrow \boxed{E(3,2)}$$

תשובה: $E(3,2)$.

ב. נתון $EB = BC$ **,** $x_C > x_B$ **. נסמן** $C(x,0)$.

$$\sqrt{(3-7)^2+(2-4)^2} = \sqrt{(7-x)^2+(4-0)^2}$$

$$20 = (7-x)^2+16$$

$$4 = (7-x)^2$$

$$2 = 7-x \quad \rightarrow x=5 \quad \textit{not o.k.} \quad x_C < x_B$$

$$-2 = 7-x \quad \rightarrow x=9 \quad \textit{o.k.} \quad x_C > x_B$$

תשובה: $C(9,0)$.

ג. (1) נמצא, תחילה, את משוואת התיכון CE .

$m_{EC} = \frac{2-0}{3-9} = -\frac{1}{3}$.

משוואת התיכון CE**, על פי השיפוע והנקודה** $C(9,0)$ **היא:** $y-0=-\frac{1}{3}(x-9) \quad \rightarrow y=-\frac{1}{3}x+3$.

שיעורי הנקודה K **, כאשר** $x_K = x_B = 7$ **, הם:** $y=-\frac{1}{3}\cdot 7+3=\frac{2}{3} \quad \rightarrow \boxed{K(7,\frac{2}{3})}$.

$KF = y_K - y_F = \frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}$.

תשובה: $K(7,\frac{2}{3})$ **,** $KF=\frac{2}{3}$.

(2) נחשב את שטח משולש EKF.

$$S_{\Delta EKF} = \frac{KF\cdot h_{KF}}{2} = \frac{\frac{2}{3}\cdot(7-3)}{2} = 1\frac{1}{3}$$

תשובה: $S_{\Delta EKF} = 1\frac{1}{3}$.

א. בסל יש 2 תפוחים, מתוך n פירות.

אם טל הוציאה תפוח אחד, נשאר 1 תפוח, מתוך $n-1$ פירות.

נתון שההסתברות שהיא הוציאה שני תפוחים היא $\frac{1}{36}$.

$$\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{36}$$

$$\frac{2}{n(n-1)}=\frac{1}{36} \quad / \cdot 36n(n-1)$$

$$72=n(n-1)$$

$$0=n^2-n-72$$

$$0=(n-9)(n+8)$$

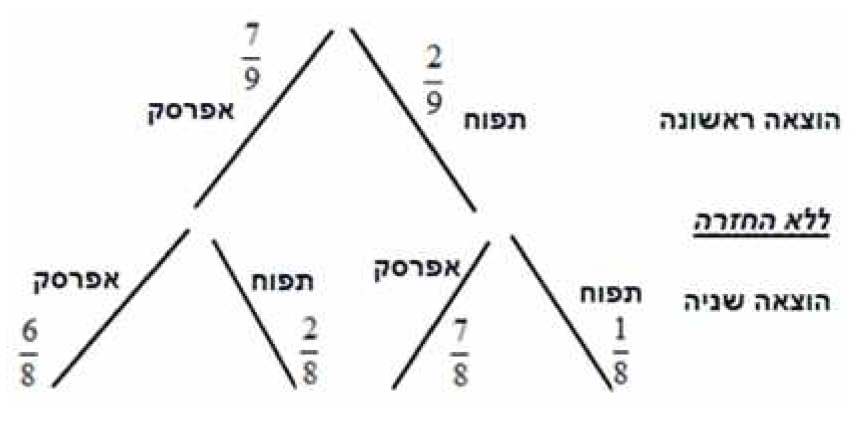
$$\boxed{n=9} \quad o.k.$$

$$n=-8 \quad not\ o.k. \quad \leftarrow n\ natural$$

מכאן שבסל היו 2 תפוחים, מתוך 9 פירות, ולכן היו 7 אפרסקים.

תשובה: בסל היו 7 אפרסקים, לפני שטל הוציאה ממנו פירות.

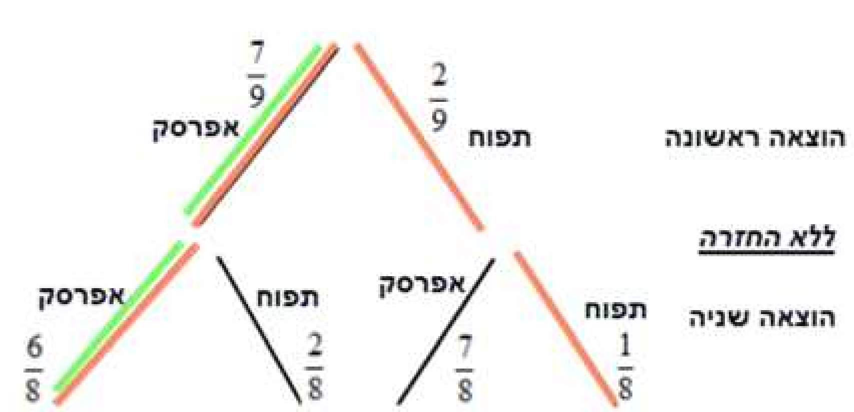
ב. נעלה את הנתונים על עץ אפשרויות.



ההסתברות שהפרי השני, שהוציאה טל, היה תפוח – היא: $P=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{2}{9}$.

תשובה: ההסתברות היא $\frac{2}{9}$.

ג. נסמן באדום, בעץ האפשרויות, את המסלולים להוצאת שני פירות מאותו הסוג.



ההסתברות שטל הוציאה מן הסל שני פירות מאותו סוג היא: $P=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}=\frac{11}{18}$ **.**

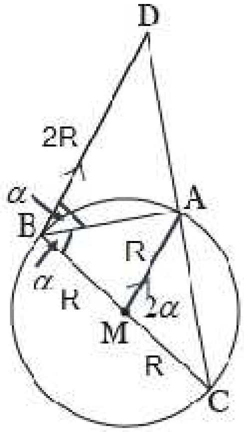
תשובה: ההסתברות היא $\frac{11}{18}$**.**

ב. ידוע שטל הוציאה מן הסל שני פירות מאותו סוג.

יש לחשב את ההסתברות שהיא הוציאה שני אפרסקים. זה החלק של המסלול הירוק מבין המסלולים האדומים.

$$P(2\ peaches / same\ kind\ of\ \ fruits)=\frac{P(2\ peaches\cap same\ kind\ of\ \ fruits)}{P(same\ kind\ of\ \ fruits)}=\frac{\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}}{\frac{11}{18}}=\frac{21}{22}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{21}{22}$ **.**



נתונים

1. M **מרכז המעגל 2.** R **רדיוס המעגל 3.** BC **קוטר 4.** $\sphericalangle ABD = \frac{1}{2}\sphericalangle AMC$ **.**

עבור ד. 5. ΔABM **שווה צלעות.**

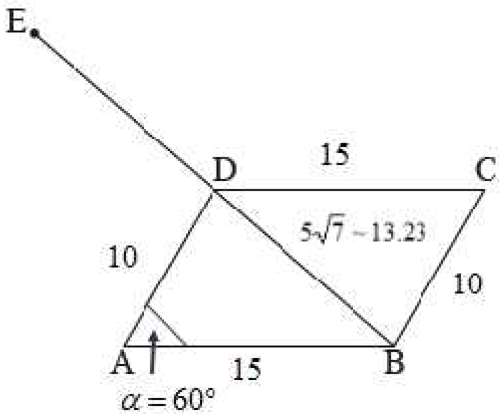
צ"ל: א. $\sphericalangle DBA = \sphericalangle ABC$ **. ב.** $\Delta CBD \sim \Delta CMA$ **.**

ג. MA **קטע אמצעים ב-** ΔDBC **. ד.** $S_{\Delta CBD}$ **.**

הסבר		טענה	נימוק
1	6	M מרכז המעגל	נתון
	7	$\sphericalangle AMC = 2\sim$	סימון של זווית מרכזית
7 ,4	8	$\sphericalangle DBA = \frac{1}{2}\sphericalangle AMC = \sim$	נתון וחישוב
7	9	$\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\sphericalangle AMC = \sim$	זווית היקפית שווה לחצי הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת ($\overset{\frown}{AC}$)
9 ,8	10	$\sphericalangle DBA = \sphericalangle ABC$	כלל המעבר
		מ.ש.ל. א	
9 ,8	11	$\sphericalangle CBD = 2\sim$	סכום זוויות
11 ,7	12	$\sphericalangle CBD = \sphericalangle AMC$ (ז)	כלל המעבר
	13	$\sphericalangle BCD = \sphericalangle MCA$ (ז)	זווית משותפת
13 ,12	14	$\Delta CBD \sim \Delta CMA$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. ב	
12	15	$MA \parallel BD$	אם זוויות מתאימות שוות אז הישרים מקבילים
6 ,4	16	$BM = MC$	רדיוסים שווים במעגל
16 ,15	17	MA קטע אמצעים ב- ΔDBC	יוצא מאמצע צלע ומקביל לצלע שממול
		מ.ש.ל. ג	
5	18	ΔABM שווה צלעות	נתון
18	19	$\sim = 60°$	זוויות שוות ל- $60°$ במשולש שווה צלעות
19 ,11	20	$\sphericalangle CBD = 120°$	הצבה
2	21	$MA = R$	נתון
21 ,17	22	$BD = 2R$	קטע אמצעים במשולש שווה למחצית הצלע שממול
3 ,2	23	$BC = 2R$	נתון
23 ,22 ,20	24	$S_{\Delta CBD} = \frac{2R \cdot 2R \cdot \sin 120}{2} = R^2\sqrt{3}$	נוסחת שטח משולש
		מ.ש.ל. ג	

א. $ABCD$ **מקבילית.**

האלכסון במקבילית מחלק אותה לשני משולשים שווי שטח (משולשים חופפים).



$$S_{\Delta BAD}=\frac{15\cdot10\cdot\sin\sim}{2}\to S_{\Delta BAD}=75\sin\sim$$

תשובה: $S_{\Delta BAD}=75\sin\sim$.

ב. נתון $S_{ABCD}=75\sqrt{3}$ **, לכן** $S_{\Delta BAD}=\frac{75\sqrt{3}}{2}$.

$$\frac{75\sqrt{3}}{2}=75\sin\sim \quad /:75$$

$$\sin\sim=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\sim=60°}\quad\leftarrow\sim<90°$$

תשובה: $\sim=60°$.

ג. ΔABD **על פי משפט הקוסינוסים:**

$$(BD)^2=(AB)^2+(AD)^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\sim$$

$$(BD)^2=15^2+10^2-2\cdot15\cdot10\cdot\cos60°$$

$$(BD)^2=175$$

$$\boxed{BD=5\sqrt{7}\sim13.23}$$

תשובה: $BD=5\sqrt{7}\sim13.23$.

ד. (1) נחשב את גודל $\sphericalangle ABE$ **.**

ΔABD **על פי משפט הסינוסים:**

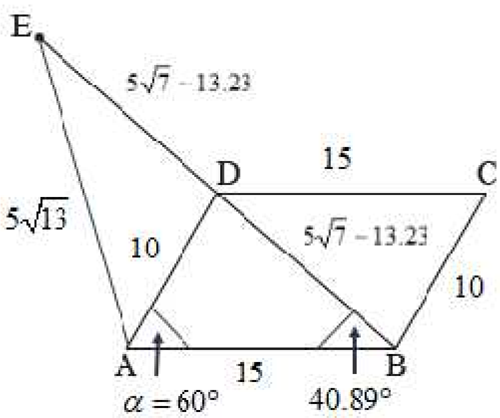
$$\frac{AD}{\sin \sphericalangle ABE} = \frac{BD}{\sin 60^\circ}$$

$$\frac{10 \sin 60^\circ}{5\sqrt{7}} = \sin \sphericalangle ABE$$

$\boxed{\sphericalangle ABE = 40.89^\circ}$ ~~$\sphericalangle ABE = 139.11^\circ$~~

האפשרות השנייה נפסלה, עקב סכום זוויות ב-ΔABD **הוא** 180° **.**

תשובה: $\sphericalangle ABE = 40.89^\circ$ **.**



(2) $ED = BD = 5\sqrt{7} \sim 13.23$, **ולכן** $EB = 10\sqrt{7}$ **.**

ΔABE **על פי משפט הקוסינוסים:**

$$(AE)^2 = (AB)^2 + (EB)^2 - 2 \cdot AB \cdot EB \cdot \cos 40.89^\circ$$

$$(AE)^2 = (15)^2 + (10\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10\sqrt{7} \cdot \cos 40.89^\circ$$

$$(AE)^2 = 325$$

$$\boxed{AE = 5\sqrt{13}}$$

ΔABE **על פי משפט הסינוסים:**

$$\frac{AE}{\sin \sphericalangle ABE} = 2R$$

$$\frac{5\sqrt{13}}{2 \sin 40.89^\circ} = R$$

$$\boxed{R = 13.77}$$

תשובה: רדיוס המעגל החוסם את ΔABE **הוא** 13.77**.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}+4$ **.**

(1) בתחום ההגדרה מכנה שונה מאפס. לכן, $(x-3)^2\neq 0 \quad \to x-3\neq 0 \quad \to \boxed{x\neq 3}$**.**

תשובה: תחום ההגדרה: $x\neq 3$ **.**

(2) במחובר השמאלי: חזקת המונה (0 **) קטנה מחזקת המכנה (** 2 **), ולכן** $\frac{1}{(x-3)^2}\to 0$ **עבור** $x\to\pm\infty$**.**

מכאן ש- $y=0+4=4$ **אסימפטוטה אופקית.**

אסימפטוטה אנכית: $x=3$ **מאפס מכנה ולא מונה, לכן הישר** $x=3$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $y=4$ **,** $x=3$ **.**

(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון, ואת סוגן.

$$f'(x)=\frac{0\cdot(x-3)^2-2\cdot(x-3)\cdot 1}{(x-3)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-2(x-3)}{(x-3)^4}}$$

מכנה הנגזרת חיובי.

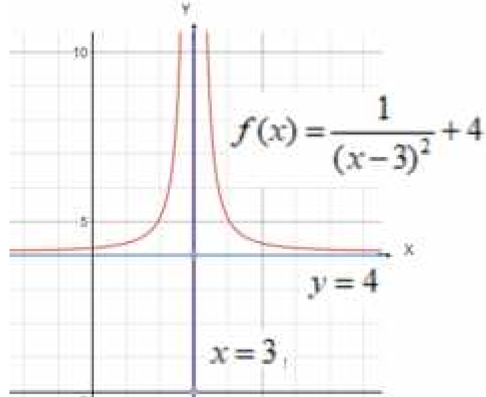
המונה מתאפס עבור $x=3$ **שלא בתחום ההגדרה,**

עבור $x=4$ **, נקבל** $f'(4)=\frac{-2(4-3)}{+}<0$ **, והפונקציה יורדת.**

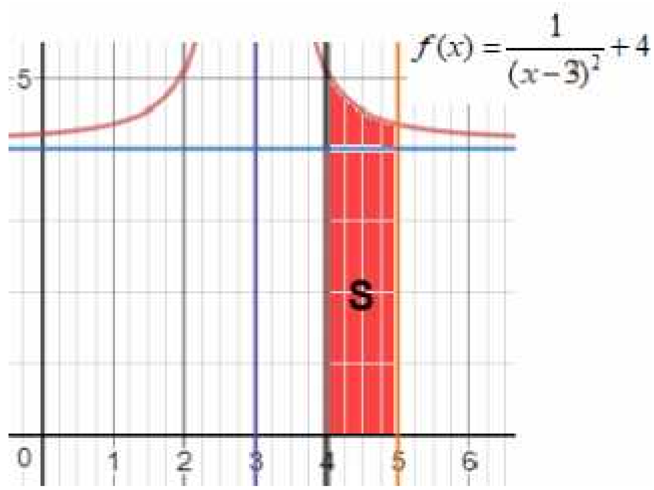
עבור $x=2$ **, נקבל** $f'(2)=\frac{-2(2-3)}{+}>0$ **, והפונקציה עולה.**

תשובה: עלייה: $x<3$ **, ירידה:** $x>3$ **.**

(4) הסקיצה המתאימה:



ב. נחשב את השטח הצבוע באדום.



$$S=\int_4^5 (\frac{1}{(x-3)^2}+4-0)\,dx$$

$$S=\int_4^5 ((x-3)^{-2}+4)\,dx$$

$$S=\frac{(x-3)^{-1}}{-1}+4x\,\Big]_4^5=-\frac{1}{x-3}+4x\,\Big]_4^5$$

$x=5:\quad 19.5$

$x=4:\quad 15$

$\boxed{S=19.5-15=4.5}$

תשובה: השטח הוא 4.5 **יח"ר.**

ג. נתון כי $g(x)=f(x)-4$ **.**

$g(x)=f(x)-4$ **היא הזזה אנכית כלפי מטה, ב-** 4 **יחידות, של** $f(x)$ **.**

בתחום $4\le x\le 5$**, גם** $f(x)$ **וגם** $g(x)$ **מעל ציר ה-** x **, כי** $f(x)>4$ **בתחום.**

ההורדה כלפי מטה, מקטינה את השטח שחשבנו בגודלו של מלבן, שממדיו $4\times1=4\times(5-4)$**.**

ולכן השטח שבין $g(x)$ **לבין ציר ה-** x **קטן ב-** 4 **יחידות שטח, והוא:** $4.5-4=0.5$ **.**

תשובה: השטח הוא 0.5 **יח"ר.**

ניתן, כמובן גם לחשב את השטח, בעזרת אינטגרל.

$$S=\int_4^5 (\frac{1}{(x-3)^2}+4-4)\,dx=\int_4^5 ((x-3)^{-2}+4)\,dx=\frac{(x-3)^{-1}}{-1}\Big]_4^5=-\frac{1}{x-3}\Big]_4^5$$

$x=5:\quad -0.5 \qquad x=4:\quad -1 \qquad \rightarrow \boxed{S=-0.5-(-1)=0.5}$

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3\sqrt{x+a}$ **(** a **פרמטר).**

הביטוי שבתוך השורש צריך להיות אי-שלילי.

$x+a\geq 0$

$\boxed{x\geq -a}$

תשובה: תחום ההגדרה: $x\geq -a$ **.**

א. הנקודה $(2,24)$ **נמצאת על גרף הפונקציה.**

$24=2^3\sqrt{2+a} \quad /:8$

$3=\sqrt{2+a} \quad ()^2$

$9=2+a$

$\boxed{a=7} \quad 3=\sqrt{2+7} \quad \rightarrow 3=3 \quad o.k.$

תשובה: $a=7$ **.**

א. נציב $a=7$ **ונקבל:** $f(x)=x^3\sqrt{x+7}$ **(תחם ההגדרה** $x\geq -7$ **).**

(1) בציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$0=x^3\sqrt{x+7}$

$x^3=0 \quad \rightarrow x=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,0)}$

$\sqrt{x+7}=0 \quad \rightarrow x=-7 \quad \rightarrow \boxed{(-7,0)}$

וקבלנו גם את נקודת החיתוך עם ציר ה- y **,** $(0,0)$ **.**

תשובה: $(0,0)$ **,** $(-7,0)$ **.**

(2) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה.

נשים לב ש: $(-7,0)$ **תהייה נקודת קיצון בקצה.**

$$f'(x)=3x^2\sqrt{x+7}+\frac{x^3}{2\sqrt{x+7}}$$

$$f'(x)=\frac{6x^2(x+7)+x^3}{2\sqrt{x+7}}$$

$$f'(x)=\frac{6x^3+42x^2+x^3}{2\sqrt{x+7}}$$

$$f'(x)=\frac{7x^3+42x^2}{2\sqrt{x+7}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{7x^2(x+6)}{2\sqrt{x+7}}}$$

$$7x^2(x+6)=0$$

$$x=0 \quad \to (0,0)$$

$$x=-6 \quad \to (-6,-216)$$

נמצא את סוגי נקודות הקיצון, בהתאם לטבלת עלייה וירידה, על פי ערכי הפונקציה והנגזרת.

נשים לב שהמכנה חיובי (עבור $x>-7$ **), והביטוי** $7x^2$ **חיובי (עבור** $x>-7, x\neq 0$ **) .**

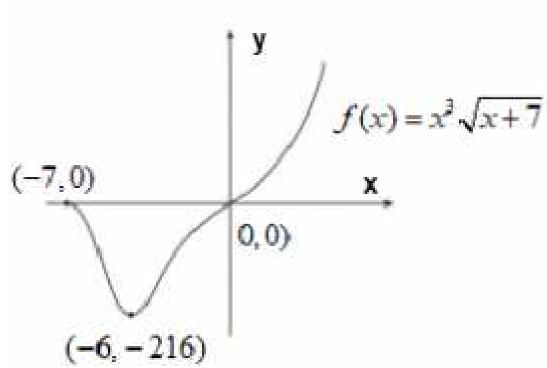
$$f'(-6.5)=\frac{+(-6.5+7)}{+}<0 \quad , \quad f'(-5)=\frac{+(-5+7)}{+}>0 \quad , \quad f'(1)=\frac{+(1+7)}{+}>0$$

x	-7		-6		0		
$f(x)$	0		-216		0		
$f'(x)$		**-**	0	**+**		**+**	
מסקנה	Max	↘	Min	↗	**פיתול**	↗	

הנקודה $(0,0)$ **אינה נקודת קיצון (נקראת נקודת פיתול).**

תשובה: $(-6,-216)$ **מינימום ,** $(-7,0)$ **מקסימום.**

(3) הסקיצה המתאימה.



הערה – בראשית הצירים, ערך הנגזרת הוא 0**, והמשיק (במקרה זה) הוא ציר ה-** x **.**

(4) על פי הסרטוט.

תשובה: חיוביות: $x>0$ **, שליליות:** $-7<x<0$ **.**

ד. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+c$ **(** c **פרמטר), תזוזה אנכית של** $f(x)$ **.**

אם $g(x)=f(x)+256$ **, אז נקודת המינימום שלה תהייה** $(-6,0)$**, והגרף ישיק לציר ה-**x**.**

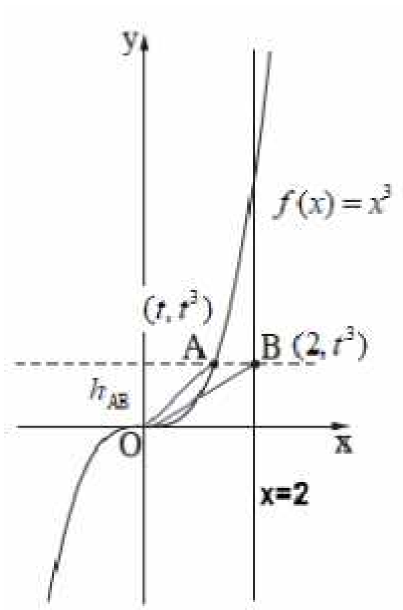
על פי ההערה בתת-סעיף ג(3), גם עבור $g(x)=f(x)+0$ **הפונקציה משיקה לציר ה-** x **בנקודה** $(0,0)$**.**

תשובה: $c=256$, $c=0$**.**

א. הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא *שטח המשולש* ABO.

נסמן $A(t, t^3)$ **נקודה על גרף הפונקציה** $f(x) = x^3$ **בתחום** $0 < t < 2$**.**

AB **מקביל לציר ה-** x **, ולכן** $y_B = y_A = t^3$ **, ו-** $B(2, t^3)$ **.**



$AB = x_B - x_A = 2 - t$ **, ואורך הגובה החיצוני לצלע זו הוא** $h_{AB} = t^3 - 0 = t^3$ **.**

$$S_{\Delta ABO} = \frac{AB \cdot h_{AB}}{2}$$

$$S_{\Delta ABO} = \frac{(2-t)\cdot t^3}{2}$$

$$S_{\Delta ABO} = \frac{2t^3 - t^4}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABO} = t^3 - 0.5t^4}$$

$$\boxed{S' = 3t^2 - 2t^3}$$

$$0 = 3t^2 - 2t^3$$

$$0 = t^2(3 - 2t)$$

$$\cancel{t=0},\ t = 1.5 \quad \leftarrow 0 < t < 2$$

$$s'(1) = 1 > 0\ ,\ s'(2) = -4 < 0 \quad \to Max$$

תשובה: $A(1.5, 3.375)$ **, עבורה שטח המשולש** ABO **מקסימלי.**

ב. נציב $t = 1.5$ **בפונקציית השטח:** $S(1.5) = 1.5^3 - 0.5\cdot 1.5^4 = \frac{27}{32}$ **.**

תשובה: השטח המקסימלי של ABO **הוא** $\frac{27}{32}$ **יח"ר.**