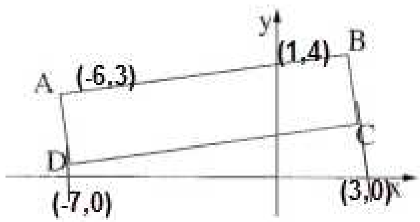
א. מרכז מעגל שנמצא על ציר ה- x **(** $\mathrm{M}(a,0)$ **) נמצא במרחק שווה ,רדיוס,**

מהנקודות $(1,4)$ **, ו-** $(-6,3)$ **שעל המעגל.**



$$\sqrt{(a-1)^2+(0-4)^2}=\sqrt{(a+6)^2+(6-3)^2}$$

$$a^2-2a+16+16=a^2+12a+36+9$$

$$a=-2 \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{M}(-2,0)}$$

$$R=\sqrt{(-2-1)^2+(0-4)^2}=5$$

ובהתאם, שתי נקודות החיתוך עם ציר ה- x **הן במרחק** 5 **יחידות ימינה ושמאלה, מהמרכז:** $(3,0)$ **ו-** $(-7,0)$**.**

תשובה: נקודות החיתוך, של המעגל, עם ציר ה- x **הן:** $(3,0)$ **,** $(-7,0)$**.**

ב. מרחק הצלע DC **מראשית הצירים הוא** $\sqrt{2}$.

נחשב את מרחק הצלע AB **מראשית הצירים, והפרש המרחקים יהיה אורך הצלע** BC**.**

$$m_{\mathrm{AB}}=\frac{4-3}{1+6}=\frac{1}{7}$$

$$y-4=\frac{1}{7}(x-1)$$

$$\boxed{\mathrm{AB}\equiv -x+7y-27=0}$$

$$d_{\mathrm{AB\text{-}(0,0)}}=-\frac{-0+7\cdot 0-27}{\sqrt{1+49}}=\frac{27\sqrt{2}}{10}$$

$$\mathrm{BC}=\frac{27\sqrt{2}}{10}-\sqrt{2} \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{BC}=\frac{17\sqrt{2}}{10}}$$

צלעות המלבן מאונכות זו לזו, לכן שיפוע זוג הצלעות האחרות,

העוברות בנקודות חיתוך המעגל עם ציר x **הוא** -7**.**

$$y-0=-7(x-3) \qquad y-0=-7(x+7)$$

$$\boxed{\mathrm{BC}\equiv 7x+y-21=0} \qquad \boxed{\mathrm{AD}\equiv 7x+y+49=0}$$

$$d_{\mathrm{BC\text{-}AD}}=\frac{49+21}{\sqrt{49+1}}=7\sqrt{2} \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{AB}=7\sqrt{2}}$$

נחשב את שטח המלבן: $S_{\mathrm{ABCD}}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}=7\sqrt{2}\cdot\frac{17\sqrt{2}}{10}=23.8 \quad \rightarrow \boxed{S_{\mathrm{ABCD}}=23.8}$

תשובה: שטח המלבן ABCD **הוא** 23.8 **יח"ר .**

א. נתונה פירמידה AOBC **כאשר** OC **מאונך לבסיס** OAB**, המונח על המישור** $[xy]$ **שמשוואתו** $z=0$ **.**

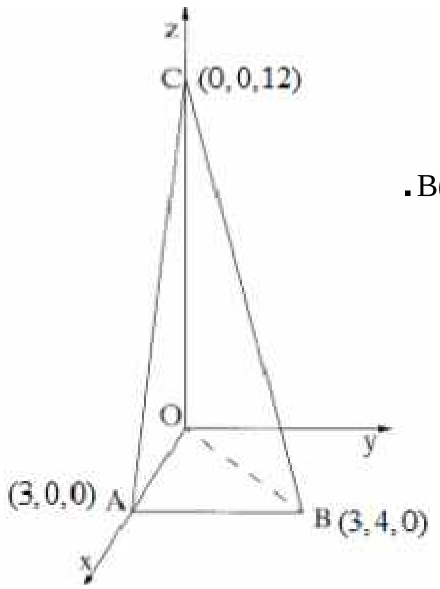
על פי הנתונים: $C(0,0,12)$ **,** $O(0,0,0)$ **,** $A(3,0,0)$ **.**

נתון כי $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ **, ולכן** $AB\perp AC$ **.**

כיוון ש- AB **מאונך למשופע** AC , **וגם ל-** OC**, הרי ש** AB **מאונך למישור** AOC **.**

מכאן ש- AB **מאונך גם ל-** AO **, ולכן מקביל לציר ה-** y **.**

תשובה: AB **מקביל לציר ה-** y **.**



ב. על פי משפט פיתגורס ב- ΔOAB **(** $OA=3, OB=5$ **) -** $AB=4$ **, ולכן** $B(3,4,0)$ **.**

נמצא את משוואת המישור CAB**.**

$$\overrightarrow{AB}=\underline{x}=(0,1,0)$$
$$\overrightarrow{AC}=\underline{C}-\underline{A}=\underline{x}=(-3,0,12)$$

ההצגה הפרמטרית של המישור היא: $\underline{x}=(3,0,0)+s(0,1,0)+t(1,0,-4)$ **.**

המישור מקביל לציר ה- y **ולכן** $b=0$**.**

$(a,0,c)\cdot(1,0,-4)=0$ **ומכאן ש-** $a-4c=0$ **ו-** $a=4c$ **.**

משוואת המישור CAB **היא:** $4x+z+d=0$ **. נציב** $C(0,0,12)$ **ונקבל ש-** $d=-12$ **.**

משוואת המישור CAB **היא** $4x+z-12=0$ **.**

משוואת המישור $[zy]$ **היא** $x=0$ **.**

$$\cos\sphericalangle(\text{®}_{CAB},[zy])=\frac{|(4,0,1)\cdot(1,0,0)|}{\left|\sqrt{4^2+1^2}\right|\left|\sqrt{1^2}\right|}=\frac{4}{\sqrt{17}}\quad\rightarrow\sphericalangle(\text{®}_{CAB},[zy])=14.036^\circ\ .$$

תשובה: הזווית בין המישור CAB **ובין המישור** $[zy]$ **היא בת** 14.036° **.**

ג. נתון כי נקודה D **נמצאת במישור** CAB **, כאשר** $CB=CD$ **.**

מכאן ש- AC **הוא גובה לבסיס** DB **במשולש שווה שוקיים** CDB **, ולכן גם תיכון לבסיס.**

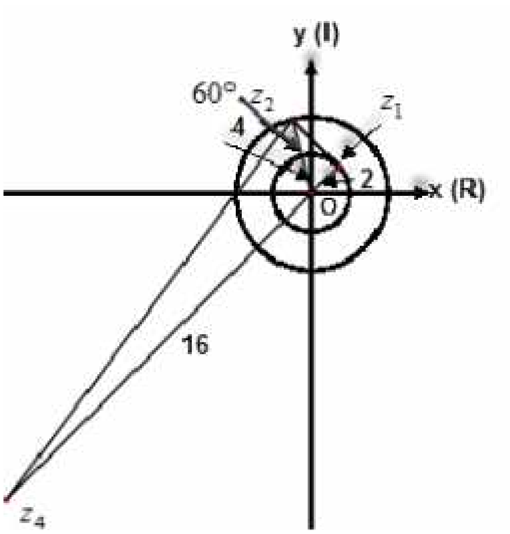
על פי נוסחת אמצע קטע, נקבל ש- $D(3,-4,0)$ **.**

נמצא את הזווית בין הישר CD **למישור** $[zy]$ **שמשוואתו** $x=0$ **.**

$$\overrightarrow{CD}=\underline{D}-\underline{C}=\underline{x}=(3,-4,-12)\ .$$

$$\sin\sphericalangle(\overrightarrow{CD},[zy])=\frac{|(3,-4,-12)\cdot(1,0,0)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+12^2}\cdot\sqrt{1^2}}=\frac{3}{13}\quad\rightarrow\sphericalangle(\overrightarrow{CD},[zy])=13.342^\circ\ .$$

תשובה: הזווית בין הישר CD **למישור** $[zy]$ **היא בת** 13.342° **.**



א. z_1 **ברביע הראשון במישור גאוס, כאשר** $|z_1| = 2$**.**

z_2 **ברביע השני במישור גאוס, כאשר** $|z_2| = 4$**.**

$\sphericalangle z_1 O z_2 = 60°$**.**

נסמן $z_1 = 2cis \sim$ **ולכן** $z_2 = 4cis(\sim + 60°)$**.**

שני מספרים מרוכבים אלה הם האיברים הראשונים בסדרה הנדסית,

ולכן : $q = \frac{z_2}{z_1} = \frac{4cis(\sim + 60°)}{2cis \sim} \rightarrow q = 2cis\,60°$**.**

z_4 **הוא האיבר הרביעי בסדרה זו, ולכן:**

$$z_4 = z_1 q^3 = 2cis \sim \cdot (2cis\,60°)^3 = 2cis \sim \cdot 8cis180° \rightarrow z_4 = 16cis(\sim + 180°)$$

ומכאן ש- z_1 **ו-** z_4 **נמצאים על ישר אחד, העובר בראשית הצירים,**

כי $\sphericalangle z_4 O z_1 = 180°$ **, כאשר** z_4 **ברביע השלישי.**

תשובה: הוכַח .

ב. נתון גם: $z_1 \cdot z_4 = -32i$

$$2cis \sim \cdot 16cis(180° + \sim) = 32\,cis\,270°$$
$$32cis(2\sim + 180°) = 32\,cis\,270°$$
$$2\sim + 180° = 270° \rightarrow \sim = 45°$$

הארגומנט (הזווית) של z_4 **הוא** $45° + 180° = 225°$**.**

תשובה: $\arg(z_4) = 225°$ **.**

ג. נחשב את שטח משולש $z_1 z_2 z_4$ **על ידי חלוקתו לשני משולשים.**

שטח $\Delta z_1 O z_2$ **:** $S\Delta z_1 O z_2 = \frac{2 \cdot 4 \sin 60°}{2} = 2\sqrt{3}$**.**

שטח $\Delta z_4 O z_2$ **:** $S\Delta z_4 O z_2 = \frac{16 \cdot 4 \sin 120°}{2} = 16\sqrt{3}$**.**

תשובה: שטח $z_1 z_2 z_4$ **הוא** $18\sqrt{3}$ **יח"ר.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\ell n\,(ax-2)}{ax-2}$ **,** ($a\neq 0$ **פרמטר).**

(1) תחום ההגדרה $x>\frac{2}{a} \leftarrow$ $ax-2>0$ **(הביטוי שמקבלת פונקציית ה-** ℓn **חיובי ומכנה שונה מאפס).**

תשובה: $x>\frac{2}{a}$ **.**

(2) לפונקציה אסימפטוטה אנכית שמשוואתה $x=\frac{2}{a}$ **(** $x=\frac{2}{a}$ **מאפס מכנה ולא מונה).**

תשובה: $x=\frac{2}{a}$ **.**

(3) נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x **.**

(עבור $x>\frac{2}{a}$ **, אין נקודת חיתוך עם ציר** y **כאשר** $a>0$ **).**

$$0=\ell n\,(ax-2)$$

$$ax-2=1 \quad \rightarrow x=\frac{3}{a} \quad \rightarrow \boxed{(\frac{3}{a},0)}$$

תשובה: $(\frac{3}{a},0)$ **.**

(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה.

$$f'(x)=\frac{\frac{a(ax-2)}{ax-2}-a\ell n\,(ax-2)}{(ax-2)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{a(1-\ell n\,(ax-2))}{(ax-2)^2}}$$

$$1-\ell n\,(ax-2)=0$$

$$\ell n\,(ax-2)=1$$

$$ax-2=e$$

$$x=\frac{e+2}{a} \quad \rightarrow y=\frac{\ell n\,(a\cdot\frac{e+2}{a}-2)}{a\cdot\frac{e+2}{a}-2}=\frac{1}{e} \quad \rightarrow \boxed{(\frac{e+2}{a},\frac{1}{e})}$$

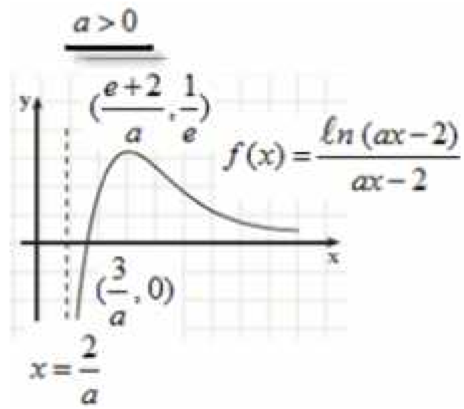
עבור $a>0$ **סימן מונה הנגזרת נקבע על ידי סימן הביטוי** $1-\ell n\,(ax-2)$ **(מכנה הנגזרת חיובי).**

במקרה זה הפונקציה $1-\ell n\,(ax-2)$ **היא פונקציה יורדת (** $(1-\ell n\,(ax-2))'=-\frac{a}{ax-2}<0$ **),**

ולכן פונקציית הנגזרת עוברת מחיוביות לשליליות , עבור $x=\frac{e+2}{a}$ **, וזו נקודת מקסימום של** $f(x)$ **.**

תשובה: $(\frac{e+2}{a},\frac{1}{e})$ **מקסימום.**

ב. סקיצה של גרף הפונקציה



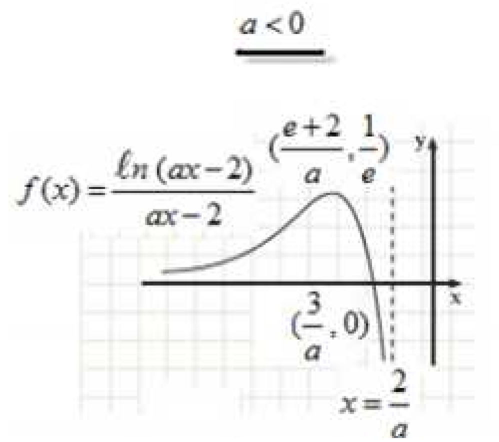
ג. עבור $a<0$: **תחום ההגדרה של הפונקציה הוא** $x<\frac{2}{a}$ **ואין נקודת חיתוך עם ציר ה-** y **.**

האסימפטוטה האנכית ונקודת החיתוך עם ציר ה- x **הן משמאל לציר ה-** y **.**

הפונקציה $a(1-\ell n\,(ax-2))$ **היא פונקציה יורדת (** $a(1-\ell n\,(ax-2))' = a(-\frac{a}{ax-2})<0$ **),**

ולכן פונקציית הנגזרת עוברת מחיוביות לשליליות , עבור $x=\frac{e+2}{a}$, **וזו נקודת מקסימום של** $f(x)$ **.**

סקיצה של גרף הפונקציה.

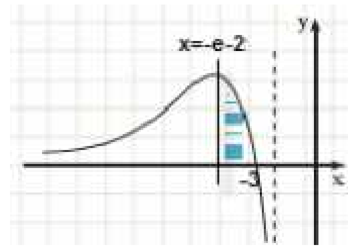


ד. נתון כי האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים נפגשות בנקודה $(-2,0)$ **.**

$y=0$ **היא אסימפטוטה אופקית ו-** $x=-2$ **אסימפטוטה אנכית, ולכן** $-2=\frac{2}{a}$ **ו-** $a=-1$ **.**

נחשב את השטח המבוקש (צבוע בכחול), שבין גרף הפונקציה $f(x)=\frac{\ell n(-x-2)}{-x-2}$ **, ציר ה-** x **,**

והישר $x=\frac{e+2}{-1}=-e-2$ **, העובר בנקודת המקסימום של הפונקציה, על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית.**



$$S=\int_{-e-2}^{-3}\left(\frac{\ell n(-x-2)}{-x-2}-0\right)dx$$

$$S=\int_{-e-2}^{-3}\left(-\ell n(-x-2)\cdot\frac{-1}{-x-2}\right)dx$$

$$S=-\frac{(\ell n(-x-2))^2}{2}\Big]_{-e-2}^{-3}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-3: \quad -\frac{(\ell n(-(-3)-2))^2}{2}=0 \\ x=-e-2: \quad -\frac{(\ell n(-(-e-2)-2))^2}{2}=-\frac{1}{2} \end{array}\right\} S=0-(-\frac{1}{2})=\boxed{\frac{1}{2}}$$

תשובה: השטח הוא $\frac{1}{2}$ **יח"ר .**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+2x+a}{e^x}$.

(1) נקודת חיתוך עם ציר y **:** $\boxed{(0,a)} \leftarrow \quad f(0)=\frac{0^2+2\cdot 0+a}{e^0}=a$

נקודת חיתוך עם ציר x **:** $x^2+2x+a=0$ **. זו משוואה ריבועית,**
שבה הדיסקרימיננטה $\Delta=4-4a$ **היא שלילית עבור** $a>4$ **ולכן אין נקודת חיתוך עם ציר** x **,**
והפונקציה חיובית לכל x **(כי מכנה הפונקציה חיובי, וביטוי המונה הוא של פרבולה ישרה).**
תשובה: $(0,a)$**.**

(2) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$f'(x)=\frac{(2x+2)e^x-(x^2+2x+a)e^x}{(e^x)^2}$$

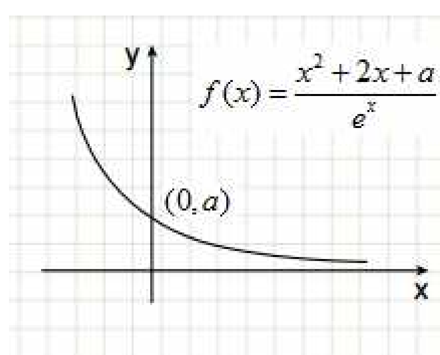
$$f'(x)=\frac{2x+2-x^2-2x-a}{e^x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-x^2+2-a}{e^x}}$$

מכנה הנגזרת חיובי. מונה הנגזרת הוא של פרבולה הפוכה ושלילית (עבור $a>4$ **מתקבל ש-** $2-a<0$ **) ,**
ולכן הנגזרת שלילית לכל x **.**
תשובה: ירידה: כל x **, עלייה : אף** x **.**

(3) על פי הציור הנתון, $f''(x)>0$ **לכל** x **ולכן הפונקציה** $f(x)$ **קעורה כלפי מעלה** $(\cup)$ **לכל** x **ואין נקודות פיתול.**
תשובה: אין נקודות פיתול ל- $f(x)$ **.**

(4) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ **.**



ב. כיוון ש $f''(x)$ יורדת לכל x, הרי ש- $f'''(x)<0$ לכל x,

ומכאן ש- $f'(x)$ קעורה כלפי מטה $(\cap)$ לכל x ואין לה נקודות פיתול.

תשובה: לפונקציית הנגזרת הראשונה, $f'(x)$, אין נקודות פיתול.

ג. $f'(x)$ שלילית לכל x, לכן הגרף שלה מתחת לציר ה- x.

$$\int_0^1 (0-f'(x))\,dx = 5-\frac{8}{e}$$

$$-f(1)-(-f(0)) = 5-\frac{8}{e}$$

$$-\frac{1^2+2\cdot1+a}{e^1}-(-a) = 5-\frac{8}{e}$$

$$-\frac{3+a}{e}+a = 5-\frac{8}{e}$$

$$-3-a+ea = 5e-8$$

$$-a(-1+e) = -5(1-e)$$

$$\boxed{a=5}$$

תשובה: $a=5$.