א. נסמן ב- x את מהירות הולך הרגל (קמ"ש), ובהתאם $x+10$ מהירות רוכב האופניים (קמ"ש).

נשים לב שכאשר הלכו זה לקראת זה, 36 דקות נוספות (בין הדקות ה- 24 ל- 60),

עברו יחדיו 12 ק"מ ב- 36 דקות (או $0.6=\frac{36}{60}$ שעה)

$s=vt$ - המרחק (s) שווה למהירות (v) כפול זמן (t)

	זמן **שעות** t	**מהירות** **קמ"ש** v	**דרך-מרחק -** **ק"מ** s
הולך הרגל	0.6	x	$0.6x$
רוכב האופניים	0.6	$x+10$	$0.6(x+10)$

לכן, המשוואה המתאימה: $0.6x+0.6(x+10)=12$

נפתור את המשוואה:

$$0.6x+0.6(x+10)=12$$
$$0.6x+0.6x+6=12$$
$$1.2x=6 \quad / :10$$
$$\boxed{x=5}$$

מהירות הולך הרגל 5 קמ"ש ומהירות רוכב האופניים 15 קמ"ש.

תשובה: מהירות רוכב האופניים 15 קמ"ש.

ב. רוכב האופניים עבר עד הפגישה 60 דקות $=24+36$, כלומר שעה אחת.

כיוון שמהירותו 15 ק"מ, הרי שהמרחק שעבר מיישוב A היה 15 ק"מ.

תשובה: הפגישה הייתה במרחק של 15 ק"מ מיישוב A.

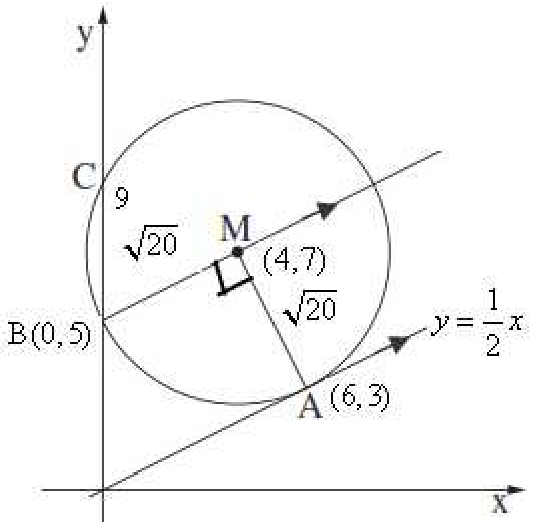
א. (1) הישר משיק למעגל, לכן שיפוע הרדיוס AM **הוא** -2**,**

כי הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה.

שיעורי מרכז המעגל, הנמצא על הישר $y=7$ **הם** $(a,7)$**.** $(6,3)$

$$-2=\frac{3-7}{6-a}$$
$$-12+2a=-4$$
$$a=4$$

תשובה: שיעורי מרכז המעגל הם $(4,7)$**.**



(2) נמצא את אורך הרדיוס (AM **).**

$$R=\sqrt{(4-6)^2+(7-3)^2}=\sqrt{20}$$

תשובה: משוואת המעגל היא $(x-4)^2+(y-7)^2=20$

ב. (1) נציב $x=0$ **במשוואת המעגל**

$$(0-4)^2+(y-7)^2=20$$
$$(y-7)^2=4$$
$$y-7=2 \quad y-7=-2$$
$$y=5 \quad\quad y=9$$

ועל פי הציור הנתון $\mathrm{B}(0,5)$

$$m_{\mathrm{BM}}=\frac{5-7}{0-4}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

קבלנו שהשיפועים שווים ולכן BM **מקביל למשיק ב-** A **.**

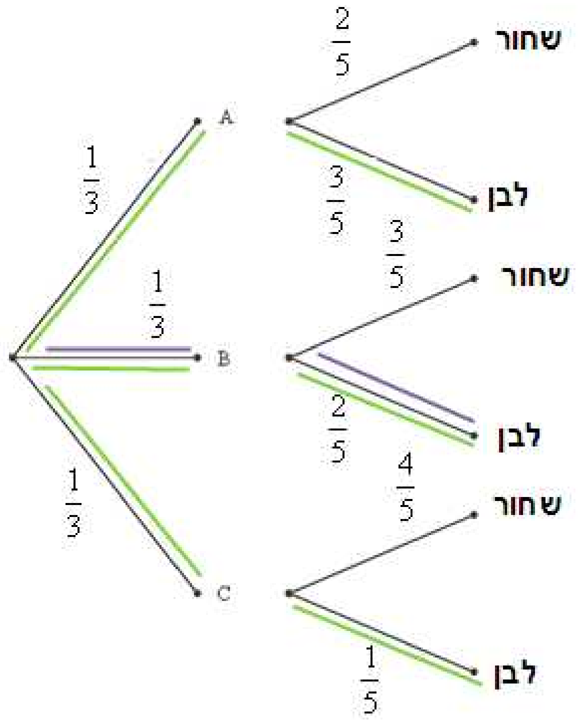
תשובה: הוּכַח.

(2) כיוון BM **מקביל למשיק ב-** A **ו-** AM **מאונך למשיק, הרי ש-** $\sphericalangle\mathrm{BMA}=90^\circ$

$$S_{\Delta\mathrm{BMA}}=\frac{\mathrm{BM}\cdot\mathrm{MA}}{2}=\frac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{20}}{2}=10\ .$$

תשובה: $S_{\Delta\mathrm{BMA}}=10$

א. (1) נציג עץ אפשרויות מתאים.



כאשר מחשבים הסתברות מותנית באמצעות עץ, מומלץ לצבוע.

בירוק צבועים שלושת המסלולים המתאימים להוצאת כדור לבן.

בסגול האפשרות להוצאת כדור לבן מקופסה B **עבור תת סעיף א (2)**

$$p(white\ ball)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=0.4$$

תשובה: ההסתברות להוציא כדור לבן היא 0.4 **.**

(2) יש למצוא את ההסתברות שהכדור יצא מקופסה B **, כאשר ידוע שהכדור לבן.**

כלומר את ההסתברות של המסלול הסגול מתוך המסלולים הירוקים

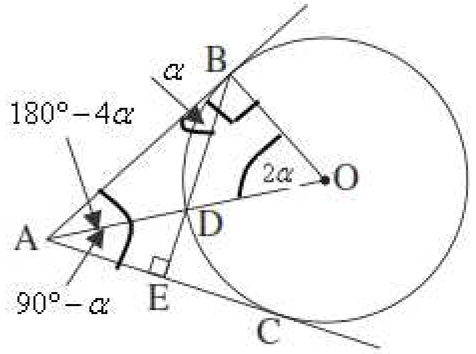
$$p(box\ \mathrm{B}/\ white\ ball)=\frac{P(box\ \mathrm{B}\cap white\ ball)}{P(white\ ball)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}}{0.4}=\frac{1}{3}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{1}{3}$ **.**

ב. בקופסה C **יש רק כדור לבן אחד, כלומר יש להוציא לבן ושחור (אם יוצא לבן, נותרו רק שחורים) , או שחור ולבן.**

$$p=\frac{1}{5}\cdot 1+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=0.4$$

תשובה: ההסתברות היא 0.4 **.**



<u>נתונים</u>

1. AB **משיק למעגל ב-** B **.**

עבור ב:

2. AC **משיק למעגל ב-** C **.**

3. $BE \perp AC$ **.**

צ"ל:

א. $\sphericalangle BOD = 2 \cdot \sphericalangle ABD$

ב. (1) $\sphericalangle BOD = 2 \cdot \sphericalangle DBE$ **(2)** $BD = AD$

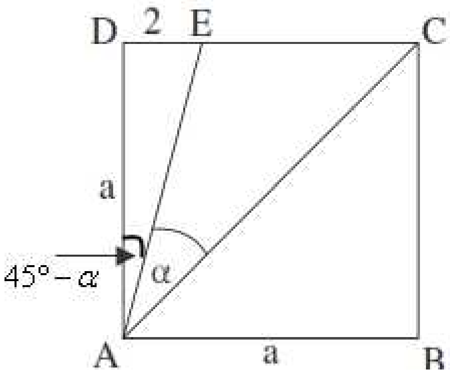
הסבר		טענה	נימוק
1	**4**	AB **משיק למעגל ב-** B	**נתון**
4	**5**	$\sphericalangle ABD = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \sim$	**זווית בין משיק למיתר + סימון**
	6	$\sphericalangle BOD = \overset{\frown}{BD} = 2\sim$	**הקשת שווה לזווית המרכזית הנשענת עליה**
6, 5	**7**	$\sphericalangle BOD = 2 \cdot \sphericalangle ABD$	**הצבה**
מ.ש.ל. א.			
4	**8**	$\sphericalangle OBA = 90°$	**הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה**
8 ,6	**9**	$\sphericalangle BAO = 90° - 2\sim$	**סכום זוויות** 180° **ב-** ΔBAO
2	**10**	AC **משיק למעגל ב-** C	**נתון**
4, 9, 10	**11**	$\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAE$ $\sphericalangle BAE = 180° - 4\sim$	**אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל אז הקטע המחבר את הנקודה למרכז המעגל חוצה את הזוויות שבין המשיקים**
3	**12**	$BE \perp AC$	**נתון**
5, 12	**13**		**חישוב**
11, 13	**14**	$90° - \sim = 180° - 4\sim$ $\sim = 30°$	**כלל המעבר + חישוב**
6	**15**	$\sphericalangle BOD = 60°$	**הצבה וחישוב**
9, 13	**16**	$\sphericalangle DAE = 30°$	**הפרש זוויות**
15, 16	**17**	$\sphericalangle BOD = 2 \cdot \sphericalangle DAE$	**חישוב**
מ.ש.ל. ב (1)			
5, 11, 16	**18**	$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD = 30°$	**הצבה**
18	**19**	$BD = AD$	**מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות** ΔBAD
מ.ש.ל. ב (2)			

א. $DE = 2$ **ס"מ** **(נתון)** $AD = a$ **ס"מ** **(נתון)**

$\sphericalangle EBC = \alpha$ **(נתון)**

$\sphericalangle DAC = 45°$ **(זוויות הריבוע ישרות והאלכסון חוצה זווית),**

$\sphericalangle DAE = 45° - \alpha$ **(הפרש זוויות).**



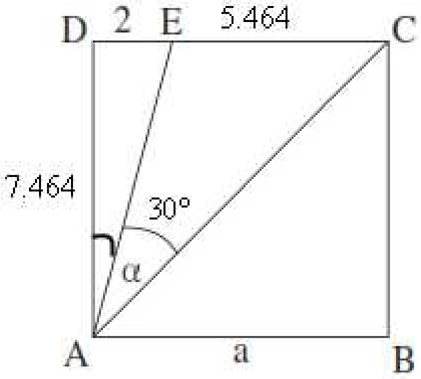
$\underline{\Delta DAE}$ **(ישר זווית,** $\sphericalangle D = 90°$)

$$\tan \sphericalangle DAE = \frac{DE}{AD}$$

$$\boxed{a = \frac{2}{\tan(45° - \alpha)}}$$

תשובה: $a = \frac{2}{\tan(45° - \alpha)}$ **.**

ב. נתון כי $\alpha = 30°$ **.**



$$a = \frac{2}{\tan(45° - 30°)} = \frac{2}{\tan(15°)} = 7.464$$

$$EC = 7.464 - 2 = 5.464$$

$$S_{\Delta ACE} = \frac{EC \cdot AD}{2} = \frac{5.464 \cdot 7.464}{2} = 20.39 \text{ סמ"ר}$$

תשובה: שטח ΔACE **הוא** 20.39 **סמ"ר.**

ג. נתון כי $DE = DE = 2$ **ס"מ, לכן** $a = 4$ **.**

$$4 = \frac{2}{\tan(45° - \alpha)}$$

$$\tan(45° - \alpha) = 0.5$$

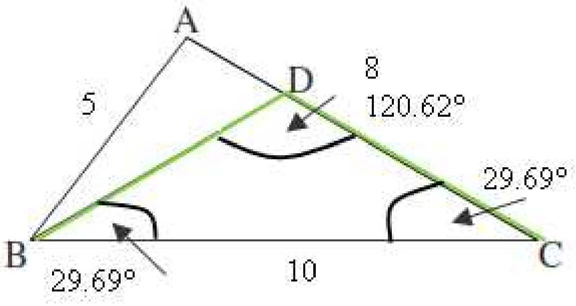
$$45° - \alpha = 26.565° + 180° k$$

$$\boxed{\alpha = 18.435°} \quad \leftarrow k = 0,\ 0 < \alpha < 45°$$

תשובה: $\alpha = 18.43°$ **.**

א. $AB = 5$ **ס"מ (נתון) ,** $AC = 8$ **ס"מ (נתון) ,** $BC = 10$ **ס"מ (נתון)**

$BD = DC$ **(נתון והצבה).**



נמצא את $\sphericalangle C$ **במשולש** ABC **, באמצעות משפט הקוסינוסים.**

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \sphericalangle C$$
$$5^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos \sphericalangle C$$
$$160 \cos \sphericalangle C = 139$$
$$\boxed{\sphericalangle C = 29.69^\circ}$$

$\sphericalangle DBC = \sphericalangle C = 29.69^\circ$ **(מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות** ΔBDC**)**

$\sphericalangle BDC = 180 - 2 \cdot 29.69^\circ = 120.62^\circ$ **(סכום זוויות** 180° ΔBDC**)**

תשובה: $\sphericalangle C = 29.69^\circ$ **,** $\sphericalangle DBC = 29.69^\circ$ **,** $\sphericalangle BDC = 120.62^\circ$

ב. נחשב את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את ΔABD **(**R_1**),**

לרדיוס המעגל החוסם את ΔBDC **(** R_2 **)**

$\underline{\Delta ABD}$	$\underline{\Delta BDC}$
$\frac{AB}{\sin \sphericalangle ADB} = 2R_1$	$\frac{BC}{\sin \sphericalangle BDC} = 2R_2$
$R_1 = \frac{5}{2 \sin \sphericalangle ADB}$	$R_2 = \frac{10}{2 \sin \sphericalangle BDC}$
$\boxed{R_1 = \frac{2.5}{\sin \sphericalangle ADB}}$	$\boxed{R_2 = \frac{5}{\sin \sphericalangle BDC}}$

נמצא את היחס $R_1 : R_2$ **, כאשר** $\sin \sphericalangle ADB = \sin \sphericalangle BDC$ **כי זוויות צמודות משלימות ל-** 180°**.**

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\frac{2.5}{\sin \sphericalangle ADB}}{\frac{5}{\sin \sphericalangle BDC}} = \frac{1}{2}$$

ניתן, כמובן, גם לחשב את כל אחד מהרדיוסים ואז למצוא את היחס.

תשובה: היחס הוא $1:2$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}$ **.**

תחום ההגדרה, ביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי, ומכנה שונה מאפס.

$x^2-4\ge0 \quad \leftarrow \quad (x-2)(x+2)\ge0$ **והגרף המתאים של פרבולה בעלת מינימום.**

ולכן $x\ge2$ **או** $x\le-2$ **ובתחומים אלו מתקיים גם** $x\neq0$ **.**

תשובה: $x\ge2$ **או** $x\le-2$.

ב. אין נקודת החיתוך עם ציר ה- y **כי** $x=0$ **לא בתחום ההגדרה.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ונקבל את הנקודות** $(2,0)$, $(-2,0)$.

תשובה: $(2,0)$, $(-2,0)$.

ג. נמצא נקודות הקיצון המוחלט.

$(2,0)$, $(-2,0)$ **הן נקודות הקצה, שתהיינה נקודות מינימום מוחלט כי הפונקציה אי-שלילית.**

$$f'(x)=\frac{\frac{\cancel{2}x\cdot x^2}{\cancel{2}\sqrt{x^2-4}}-2x\sqrt{x^2-4}}{x^4}=\frac{x^3-2x(x^2-4)}{x^4\sqrt{x^2-4}}$$

$$f'(x)=\frac{x^3-2x^3+8x}{x^4\sqrt{x^2-4}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-x^3+8x}{x^4\sqrt{x^2-4}}}$$

$$0=-x^3+8x \quad \rightarrow 0=x(-x^2+8)$$

$$x=0 \quad not\ o.k.$$

$$x=\sqrt{8} \quad \rightarrow y=\frac{\sqrt{8-4}}{8}=0.25 \quad \rightarrow (\sqrt{8},0.25)$$

$$x=-\sqrt{8} \quad \rightarrow y=\frac{\sqrt{8-4}}{8}=0.25 \quad \rightarrow (-\sqrt{8},0.25)$$

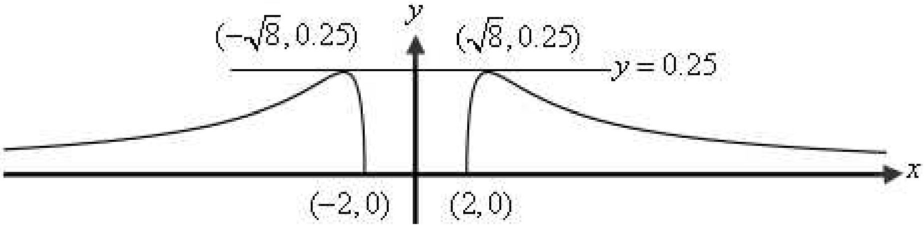
$$y(-3)=\frac{\sqrt{9-4}}{9}=0.248, \quad y(3)=\frac{\sqrt{9-4}}{9}=0.248$$

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, בעזרת ערכי הפונקציה

x		$-\sqrt{8}$		-2	🟥	2		$\sqrt{8}$	3
$f(x)$	0.248	0.25		0	🟥	0		0.25	0.248
מסקנה	↗	Max	↘	Min	🟥	Min	↗	Max	↘

תשובה: $(2,0)$, $(-2,0)$ **מינימום מוחלט ,** $(\sqrt{8},0.25)$ $(-\sqrt{8},0.25)$ **מקסימום מוחלט.**

ד. (1) הסקיצה המתאימה:



(2) הישר $y = 0.25$ **משיק לגרף הפונקציה בשתי נקודות המקסימום המוחלט שלה.**

תשובה: $y = 0.25$ **.**

א. (1) לשתי הפונקציות משיק משותף בנקודה A **,**

שאת שיעור ה- x **שלה נסמן ב-** t **.**

כלומר: $f'(t)=g'(t)$

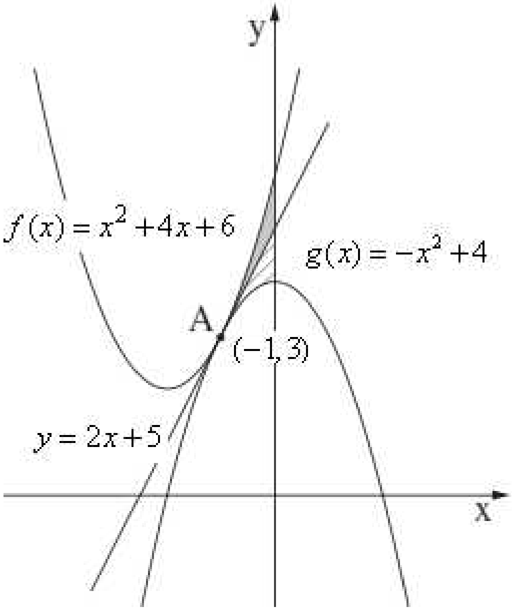
$$f(x)=x^2+4x+6$$
$$f'(x)=2x+4$$
$$f'(t)=2t+4$$
$$g(x)=-x^2+x$$
$$g'(x)=-2x$$
$$g'(t)=-2t$$

תשובה: $2t+4$ **או** $-2t$ **.**

(2) כפי שהסברנו $f'(t)=g'(t)$

$$2t+4=-2t$$
$$4t=-4 \quad /:4$$
$$t=-1\rightarrow f(-1)=(-1)^2+4\cdot(-1)+6=3\rightarrow \boxed{A(-1,3)}$$

תשובה: $A(-1,3)$



(3) נציב את שיעורי $A(-1,3)$ **בפונקציה** $g(x)=-x^2+c$

$$3=-(-1)^2+c$$
$$\boxed{c=4}$$

תשובה: $c=4$ **.**

ב. נקודת ההשקה $A(-1,3)$ **, שיפוע המשיק** $m=f'(1)=2$

$$y-3=2(x-(-1))$$
$$\boxed{y=2x+5}$$

$g(x)=-x^2+4$ **, הפרבולה בעלת המקסימום:**

כיוון שגבולות שני השטחים זהים, ויש להוכיח ששני השטחים שווים,
הרי שאם הפרש הפונקציות, בכל אינטגרל של חישוב השטח, יהיה שווה – אז השטחים יהיו שווים.

<u>הפרש הפונקציות בשטח התחתון</u>	**<u>הפרש הפונקציות בשטח העליון</u>**
$2x+5-(-x^2+4)$	$x^2+4x+6-(2x+5)$
$2x+5+x^2-4$	$x^2+4x+6-2x-5$
x^2+2x+1	x^2+2x+1

ואכן הפרש הפונקציות שווה, והשטחים יהיו שווים בשטחם.

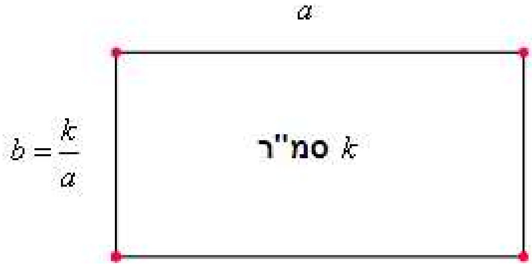
תשובה: הוכַח.

א. הפונקציה שיש להביא *למינימום* **היא** *היקף המלבן.*

שטח המלבן הוא k סמ"ר.

אם a ס"מ אורך המלבן, ו- b ס"מ רוחב המלבן,

אז $ab = k$ ובהתאם $b = \frac{k}{a}$



$$f(a) = x + 40 + 90 + \frac{3600}{x}$$

$$\boxed{P(a) = 2a + \frac{2k}{a}}$$

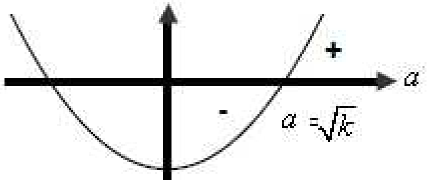
$$P'(a) = 2 - \frac{2k}{a^2}$$

$$\boxed{p'(a) = \frac{2a^2 - 2k}{a^2}}$$

$$2 = 2a^2 - 2k$$

$$\boxed{a = \sqrt{k}} \quad \leftarrow a > 0$$

$$b = \frac{k}{\sqrt{k}} \quad \rightarrow \boxed{b = \sqrt{k}}$$



מכנה הנגזרת חיובי, כאשר מונה הנגזרת פרבולה ישרה, בעלת מינימום,

לכן הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות עבור $a = \sqrt{k}$,

הפונקציה עוברת מירידה לעלייה ולכן זו נקודת מינימום.

תשובה: צלעות המלבן הן $\sqrt{k}$, כלומר המלבן שהיקפו מינימלי הוא ריבוע.

ב. קוטר המעגל החוסם את המלבן, שהיקפו מינימלי, הוא אלכסון המלבן,

(כי זוויות המלבן ישרות והקוטר נשען על זווית היקפית ישרה)

נמצא את הערך של k באמצעות משפט פיתגורס:

$$8^2 = (\sqrt{k})^2 + (\sqrt{k})^2$$

$$64 = 2k \quad /:2$$

$$\boxed{k = 32}$$

תשובה: $k = 32$ ס"מ.