א. נתונה האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **, כאשר** $a>b>0$ **.**

אורך הציר הגדול הוא 13**, ולכן:** $2a=13$ **ו-** $a=6.5$**.**

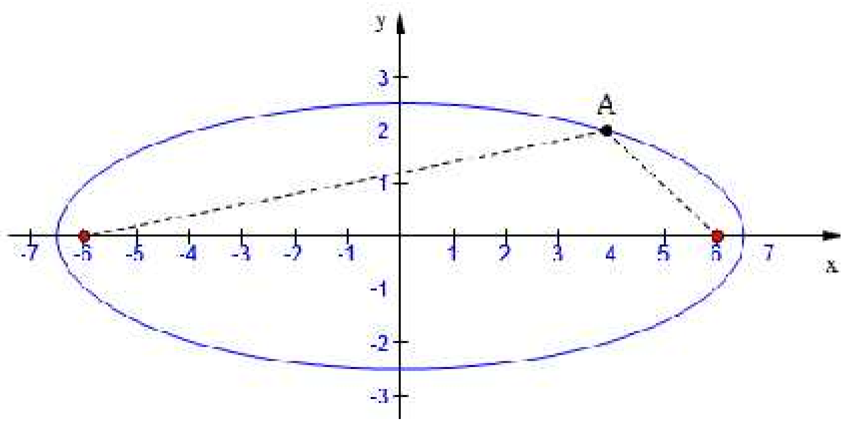
הנקודה A **ברביע הראשון, כאשר היקף** ΔF_1AF_2 **הוא** 25**.**

באליפסה, סכום המרחקים של כל נקודה שעליה מהמוקדים (F_1, F_2 **) הוא** $2a$ **,**

לכן: $2c+13=25$ **ו-** $c=6$ **.**

באליפסה מתקיים גם $c^2=a^2-b^2$ **, ובהתאם:** $b^2=6.5^2-6^2=6.25$ **.**

תשובה: משוואת האליפסה היא $\frac{x^2}{42.25}+\frac{y^2}{6.25}=1$ **.**

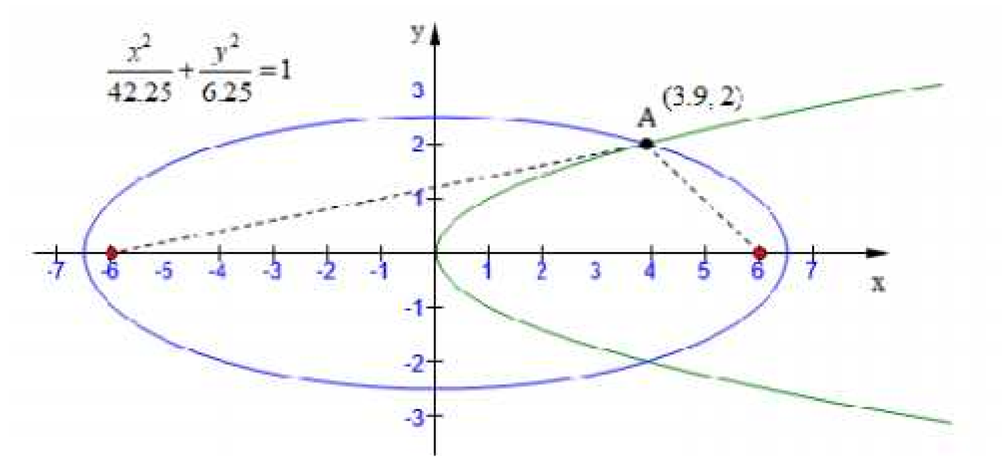


ב. נתון כי שטח ΔF_1AF_2 **הוא** 12**.**

$\frac{2c\cdot y_A}{2}=12 \quad \to 6\cdot y_A=12 \quad \to y_A=2$ **.**

נציב $y_A=2$ **במשוואת האליפסה:** $(1st\ quadrant)$ $\frac{x^2}{42.25}+\frac{2^2}{6.25}=1 \quad \to \frac{x^2}{42.25}=\frac{25}{16} \quad \to x_A=3.9$ **.**

תשובה: שיעורי הנקודה הם $A(3.9, 2)$ **.**

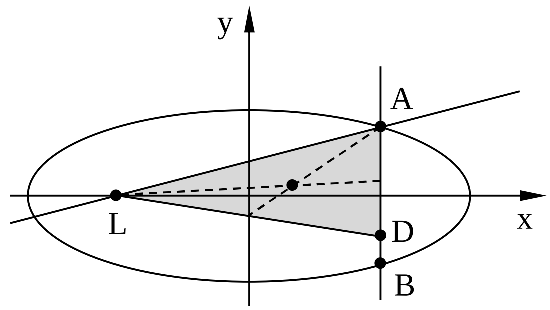


ג. הנקודה $A(3.9, 2)$ **נמצאת על הפרבולה** $y^2 = 2px$.

$y_L = 0$ **, כאשר הנקודה** L **על המשיק העובר בנקודה** $A(3.9, 2)$.

משוואת משיק לפרבולה, בנקודה שעל הפרבולה היא $yy_0 = p(x + x_0)$ **. לכן:** $x_L = -x_A = -3.9$.

תשובה: $x_L = -3.9$.



ד. הפרבולה והאליפסה נחתכות בנקודה נוספת B .

עקב הסימטריה של שתי העקומות לציר ה- x **, הרי ש-** $x_B = x_A = 3.9$.

ומכאן שגם $x_D = x_A = 3.9$ **ושיעור ה-** x **של אמצע הצלע** AD **הוא גם** 3.9.

תיכונים חותכים זה את זה ביחס $2:1$ **מהקודקוד, וזה גם היחס שיחלקו את התיכון היוצא מ-** L **, לצלע** AD .

מכאן, שמה שמשותף לכל נקודות מפגש התיכונים הוא שיעור ה- x **שלהן:** $x = \frac{1 \cdot (-3.9) + 2 \cdot 3.9}{3} = 1.3$.

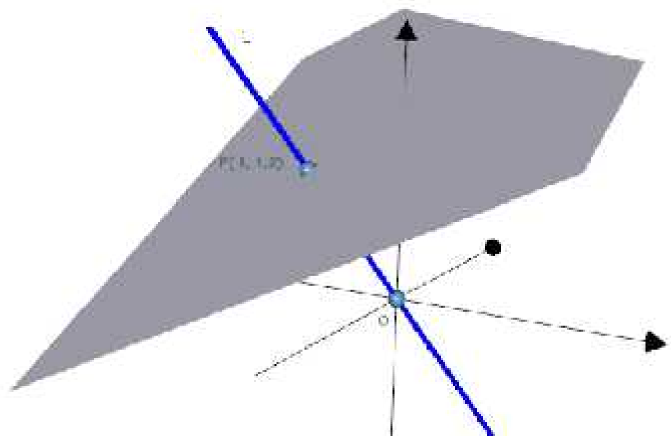
תשובה: המקום הגיאומטרי, שעליו נמצאות כל נקודות מפגשי התיכונים ב- ΔALD **, הוא הישר** $x = 1.3$.

א. הישר ℓ **עובר בראשית הצירים** B **ובנקודה** $P(-1,-1,2)$**, ולכן משוואתו היא** $\ell = \underline{x} = s(-1,-2,2)$ **.**

ישר זה מאונך למישור ®**, ולכן משוואת המישור היא** $® : -x - y + 2z + d = 0$**.**

הנקודה $P(-1,-1,2)$ **נמצאת אף היא על המישור, ולכן:** $-(-1)-(-1)+2\cdot 2+d=0$ **ונקבל** $d=-6$ **.**

תשובה: משוואת המישור היא $® : -x - y + 2z - 6 = 0$ **(או** $® : x + y - 2z + 6 = 0$**).**



ב. (1) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=z=0$**, ולכן** $-x-0+2\cdot 0-6=0$ **,** $x_A=-6$ **, ו-** $A(-6,0,0)$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=z=0$**, ולכן** $-0-y+2\cdot 0-6=0$ **,** $y_A=-6$ **ו-** $B(0,-6,0)$ **.**

תשובה: $A(-6,0,0)$ **,** $B(0,-6,0)$ **.**

(2) הנקודה $P(-1,-1,2)$ **היא מפגש אלכסוני המלבן** $ABCD$ **, שכן היא מרכז מעגל חוסם,**

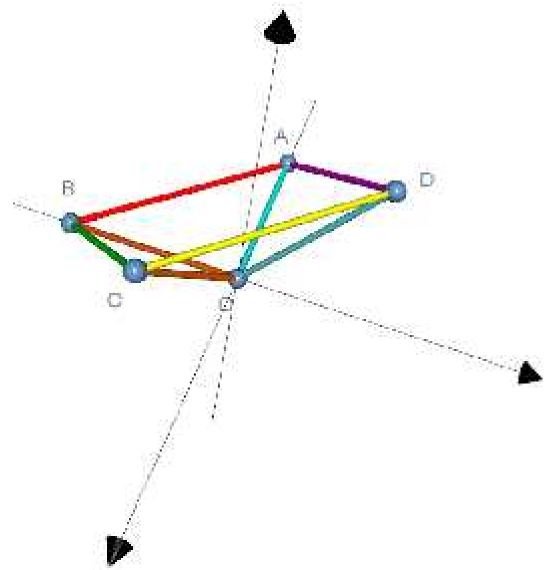
כאשר OP**, גובה הפירמידה הישרה** $OABCD$**, יורד למרכז המעגל החוסם.**

את שיעורי שני הקודקודים האחרים של המלבן נקבל באמצעות נוסחת אמצע קטע.

$$\left.\begin{aligned}\frac{x_C-6}{2}&=-1\\ \frac{y_C+0}{2}&=-1\\ \frac{z_C+0}{2}&=2\end{aligned}\right\}C(4,-2,4)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x_D+0}{2}&=-1\\ \frac{y_D-6}{2}&=-1\\ \frac{z_D+0}{2}&=2\end{aligned}\right\}D(-2,4,4)$$

תשובה: $C(4,-2,4)$ **,** $D(-2,4,4)$ **.**



ג. גובה הפאה AOB הוא גם תיכון לצלע AB, כאשר PT הוא אנך מהבסיס לישר החיתוך AB.

הזווית בין הפאה למישור הבסיס היא $\sphericalangle OTP$, שבין שני אנכים לישר החיתוך.

הסבר ארוך למתעניינים (לא נדרש בבגרות).

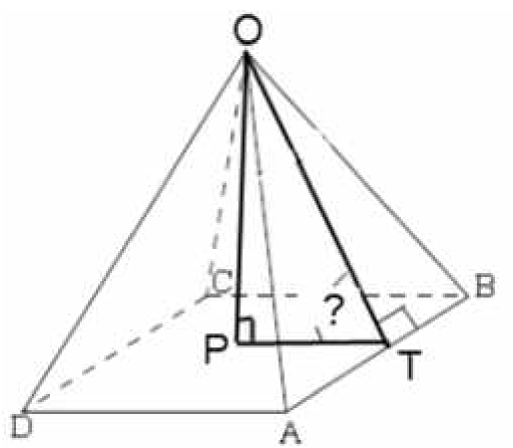
פאות הפירמידה הן משולשים שווי שוקיים, כי המקצועות הצדדיים שווים זה לזה בפירמידה ישרה.

הזווית, שבין הפאה הצדדית (AOB) לבסיס הפירמידה ABCD,
היא הזווית בין שני האנכים לישר החיתוך (מקצוע הבסיס AB).

נוריד גובה OT מהפאה למקצוע הבסיס, ולכן הוא גם תיכון.

PT הוא אנך מהבסיס, כי הוא קטע אמצעים ב- ΔDAB, ולכן גם מקביל לצלע AD ובהתאם מאונך ל- AB.

הזווית בין הפאה למישור הבסיס היא $\sphericalangle OTP$.



$\underline{\Delta OPT}$

$$\tan\sphericalangle OTP = \frac{OP}{PT} = \frac{OP}{0.5AD}$$

$$OP = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$AD = \sqrt{(-6+2)^2 + (0-4)^2 + (0-4)^2} = 4\sqrt{3}$$

$$\tan\sphericalangle OTP = \frac{\sqrt{6}}{0.5\cdot 4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\sphericalangle OTP = 35.26^\circ}$$

תשובה: הזווית, שבין הפאה הצדדית AOB, לבין בסיס הפירמידה היא בת 35.26°.

ד. (1) $F(-4,-2,0)$ **,** $G(-2,-4,0)$ **.**

$$\left.\begin{array}{l}|FG|=\sqrt{(-4+2)^2+(-2+4)^2+(0-0)^2}=2\sqrt{2}\\ |AB|=\sqrt{(-6-0)^2+(0+6)^2+(0-0)^2}=6\sqrt{2}\end{array}\right\}\boxed{|FG|=\frac{1}{3}|AB|}$$

תשובה: הראינו כי $|FG|=\frac{1}{3}|AB|$**.**

(2) נדרש שנפח הפירמידה OFGHI **יהיה** $\frac{1}{3}$ **מנפח הפירמידה** OABCD**.**

האפשרות הנוחה היא שהבסיסים שלהן יהיו מלבנים, שמונחים על אותו מישור של ABCD**,**
כאשר יחס שטחי הבסיס הוא $1:3$ **, כאשר גובה הפירמידה** OP **יהיה זהה.**

כיוון ש- $|FG|=\frac{1}{3}|AB|$**, הכי נוח לבחור את שני קודקודי המלבן האחרים, שיהיו מונחים על** CD **,**
ואז הצלע הסמוכה תהייה באותו אורך כמו של AD**.**

אפשרות אחרת היא בנייה של מקבילית (במקום מלבן, והפירמידה החדשה לא תהייה ישרה),
כאשר גם כאן נמקם את שני הקודקודים האחרים על הצלע CD**.**

כמו כן, ניתן למקם את שני הקודקודים האחרים על ישר אחר שמקביל ל CD**,**
כאשר AB **הוא מקביל אמצעי...**

לדוגמה הפשוטה:

$$\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AF}$$
$$\underline{H}-\underline{D}=\underline{F}-\underline{A}$$
$$\underline{H}=\underline{F}-\underline{A}+\underline{D}$$
$$H(0,2,4)$$

$$\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{AG}$$
$$\underline{I}-\underline{D}=\underline{G}-\underline{A}$$
$$\underline{I}=\underline{G}-\underline{A}+\underline{D}$$
$$I(2,0,4)$$

תשובה: שתי נקודות אפשריות הן: $H(0,2,4)$, $I(2,0,4)$ **(יש אינסוף אפשרויות כמובן).**

א. נפתור את המשוואה $z^3=-1$, בשתי דרכים.

הראשונה: נמצא את הפתרונות של המשוואה $z^3=-1$, על-פי נוסחת השורשים של מספר מרוכב.

$$z^3=-1$$
$$z^3=cis\,180°$$
$$z_k=cis\,(\frac{180°}{3}+\frac{360°k}{3})=cis\,(60°+120°k)$$
$$z_0=cis\,(60°)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_1=cis\,(180°)=-1$$
$$z_2=cis\,(300°)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

השנייה: כיוון שקל למצוא פתרון אחד שהוא -1 (פתרון ממשי),

וידוע שפתרונות משוואה $z^n=r\,cis\theta$ מהווים סדרה הנדסית שמנתה $cis(\frac{360°}{n})$,

מקבלים מיידית את שני הפתרונות הבאים.

תשובה: הפתרונות הם $cis\,(60°)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **,** $cis\,(180°)=-1$ **,** $cis\,(300°)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **.**

ב. נתונה סדרה הנדסית a_n , שבה: $q=2i=2cis\,90°$.

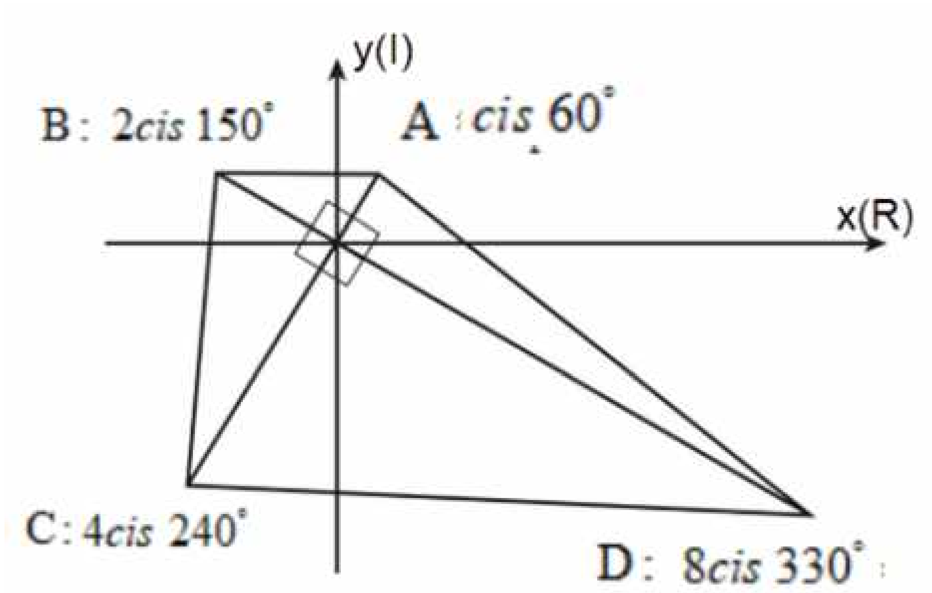
$$a_{n+4}=a_nq^4=a_n(2i)^4=a_n\cdot 2^4\cdot i^4=a_n\cdot 16\cdot 1=16a_n$$

תשובה: הראינו כי לכל n טבעי מתקיים $a_{n+4}=16a_n$.

ג. $A = a_1 = cis\ 60^\circ$ **, כי נקודה זו ברביע הראשון.**

(1) נמצא את שלושת האיברים הבאים.

$$B: a_2 = a_1q = cis\ 60^\circ \cdot 2cis\ 90^\circ = 2cis\ 150^\circ = -\sqrt{3}+i$$
$$C: a_3 = a_2q = 2cis\ 150^\circ \cdot 2cis\ 90^\circ = 4cis\ 240^\circ = -2-2\sqrt{3}i$$
$$D: a_4 = a_3q = 4cis\ 240^\circ \cdot 2cis\ 90^\circ = 8cis\ 330^\circ = 4\sqrt{3}-4i$$



תשובה: הסקיצה מעל.

(2) כיוון שהארגומנטים של הקודקודים הנגדיים הם בהפרשים של 180° **, הרי שהאלכסונים עוברים בראשית .**
כיוון שהארגומנטים של הקודקודים הסמוכים הם בהפרשים של 90° **, הרי שהאלכסונים מאונכים זה לזה.**
שטח מרובע, שאלכסוניו מאונכים זה לזה, הוא מחצית מכפלת האלכסונים.
כיוון שהאלכסונים עוברים בראשית, הרי ש:

$$AC = r_A + r_C = 1+4=5$$
$$BD = r_B + r_D = 2+8=10$$
$$\boxed{S_{ABCD} = \frac{5\cdot 10}{2} = 25}$$

תשובה: שטח המרובע $ABCD$ **הוא** 25 **.**

ד. ארבעת האיברים הבאים בסדרה מייצגים קודקודי מרובע $A'B'C'D'$ **.**

על פי סעיף ב : $a_{n+4} = 16a_n$ **, ולכן אין שינוי בארגומנטים (בהתאמה, כמובן) והערך המוחלט גדל פי** 16 **.**

מכאן שאורכי האלכסונים (שעדיין מאונכים זה לזה) גדלים גם פי 16**, הרי ששטח המרובע גדל פי** $256 = 16^2$**.**

תשובה: $\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = 256$ **.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=e^{(\frac{a}{x-1})}+c$ **(** a,c **פרמטרים).**

הפונקציה $e^{j(x)}$ **מוגדרת לכל** x **בו** $j(x)$ **מוגדרת, ולכן תחום ההגדרה הוא** $x\neq 1$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x\neq 1$ **.**

ב. $\frac{a}{x-1}$ **שואף ל-** 0 **כאשר** $x\to\pm\infty$ **, ולכן** $e^{(\frac{a}{x-1})}\to e^0=1$ **שואף ל-** 1**, כאשר** $x\to\pm\infty$**.**

ומכאן ש: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1+c$ **.**

נתון כי האסימפטוטה האופקית היא $y=1$ **, ולכן** $1+c=1$ **, ו-** $c=0$**.**

הנקודה $(0,e^{-4})$ **נמצאת על גרף הפונקציה** $f(x)=e^{(\frac{a}{x-1})}$ **, ולכן:** $e^{-4}=e^{(\frac{a}{0-1})}$**, ומכאן** $-4=-a$ **ו-** $a=4$**.**

תשובה: $c=0$ **,** $a=4$**.**

ג. (1) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)=e^{(\frac{4}{x-1})}$ **.**

$$f'(x)=e^{(\frac{4}{x-1})}\cdot(\frac{-4}{(x-1)^2})$$

$$\boxed{f'(x)=-\frac{4e^{(\frac{4}{x-1})}}{(x-1)^2}}$$

הנגזרת שלילית עבור $x\neq 1$ **.**

תשובה: עלייה – אף x **, ירידה -** $x>1$ **או** $x<1$ **.**

(2) תשובה: נמצא את תחומי החיוניות והשליליות של הפונקציה $f(x)=e^{(\frac{4}{x-1})}$ **.**

הפונקציה $e^{j(x)}$ **חיובית לכל** x **בו** $j(x)$ **מוגדרת, ולכן תחום החיוביות הוא** $x\neq 1$ **.**

תשובה: שליליות – אף x **, חיוביות -** $x>1$ **או** $x<1$ **.**

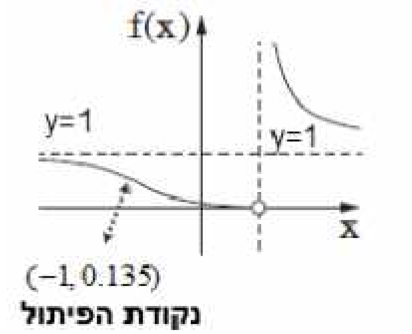
ד. נתון כי לפונקציה $f(x)=e^{(\frac{4}{x-1})}$ יש נקודת פיתול יחידה, בנקודה שבה $x=-1$.

(1) נבדוק את התנהגות הפונקציה, כאשר $x \to 1$ מימין ומשמאל.

נציב $x=0.9$ ונקבל $4.2\cdot10^{-18}$, כלומר שאיפה ל- $(1,0)$ משמאל (נקודה ריקה).

נציב $x=1.1$ ונקבל $2.4\cdot10^{17}$, כלומר הישר $x=1$ הוא אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה מימין.

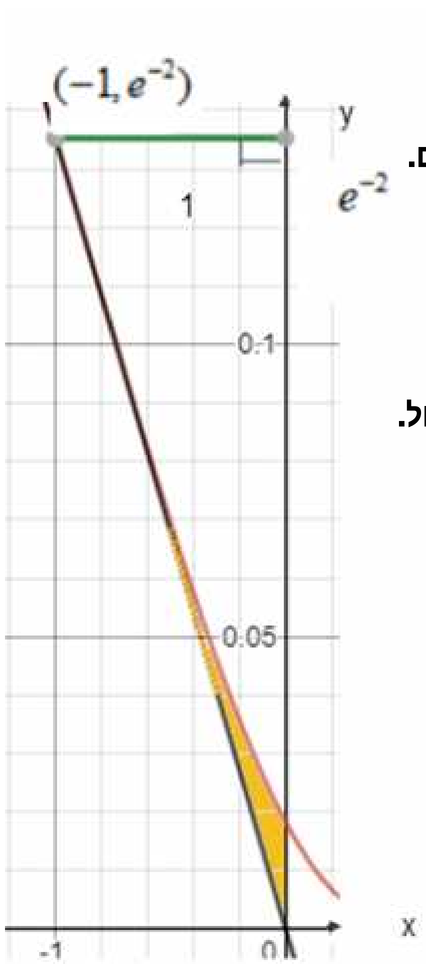
בסרטוט נשים לב גם לאסימפטוטה האופקית הנתונה, ולנקודת הפיתול $(-1,e^{-2})$.



תשובה: הסרטוט מעל.

(2) הישר $y=k$ חותך את הפונקציה מעל האסימפטוטה האופקית, ובינה לבין ציר ה- x .

תשובה: $k>1$ או $0<k<1$.



ה. על-פי תיאור השטח שבשאלה, המשיק בנקודת הפיתול עובר בראשית הצירים.

(ניתן, אבל ממש לא נדרש, גם לראות ש- $f'(-1)=e^{-2}$,

ומשוואת המשיק בנקודת הפיתול היא $y=e^{-2}x$, שעובר בראשית הצירים).

בנקודת הפיתול, המשיק חותך את גרף הפונקציה – ועל פי תחומי הקעירות,

עובר מתחת לגרף מימין לנקודת הפיתול, ומעל לגרף משמאל לנקודת הפיתול.

ולכן, השטח המבוקש (המסומן בצהוב),

קטן משטחו של המשולש שבציור משמאל, שהוא $\frac{1\cdot e^{-2}}{2}=\frac{1}{2}e^{-2}$.

תשובה: הוכַח שהשטח המתואר קטן מ- $\frac{1}{2}e^{-2}$.

א. נתונה פונקציית הנגזרת, של הפונקציה $f(x)$ **:** $f'(x)=\frac{\ell n(-x)+2}{x}$ **.**

ל- $f(x)$ **, ל-** $f'(x)$ **ול-** $f''(x)$ **יש אותו תחום הגדרה.**

(1) בתחום הגדרה, הארגומנט – הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית, צריך להיות חיובי,

לכן: $x<0 \quad \rightarrow -x>0$ **.**

וגם המכנה של הפונקציה צריך להיות שונה מ- 0**.**

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x<0$ **.**

(2) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ **, בעזרת סימני** $f'(x)$ **המוגדרת באותו התחום.**

$$\frac{\ell n(-x)+2}{x}=0$$

$$\ell n(-x)+2=0$$

$$\ell n(-x)=-2$$

$$-x=e^{-2}$$

$$x=-e^{-2}$$

$$\left.\begin{matrix} f'(-e^{-1})<0 \\ f'(-e^{-3})>0 \end{matrix}\right\} x=-e^{-2}, \min$$

נשים לב, עבור סעיף ב(2) ש- $f'(-e^{-2})=0$ **.**

תשובה: עלייה - $-e^{-2}<x<0$ **, ירידה -** $x<-e^{-2}$**.**

(3) נמצא את תחומי הקעירות של הפונקציה $f(x)$, בעזרת סימני $f''(x)$ המוגדרת באותו התחום.

$$f''(x)=\frac{\frac{-1}{-x}\cdot x-(\ell n(-x)+2)}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{1-\ell n(-x)-2}{x^2}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{-1-\ell n(-x)}{x^2}}$$

$$\frac{-1-\ell n(-x)}{x^2}=0$$

$$-1-\ell n(-x)=0$$

$$\ell n(-x)=-1$$

$$-x=e^{-1}$$

$$x=-e^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(-e^{-2})>0 \quad \rightarrow \cup \\ f''(-e^{-0.5})<0 \quad \rightarrow \cap \end{array}\right\} x=-e^{-1}, \textit{inflection point}$$

תשובה: קעירות כלפי מעלה ($\cup$) - $-e^{-1}<x<0$, קעירות כלפי מטה ($\cap$) - $x<-e^{-1}$.

ב. $f'(x)=\frac{\ell n(-x)+2}{x}$.

(1) נמצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים.

כאשר $x\rightarrow-\infty$ **, מתקבל ש-** $\ell n(-x)+2$ **שואף ל-** $+\infty$ **לאט יותר מאשר** $-\infty$ $x\rightarrow$ **, ו-** $f'(x)\rightarrow0^-$.

לכן $y=0$ **אסימפטוטה אופקית , ומגיעים אליה מלמטה, כאשר הפונקציה** $f'(x)$ **בירידה.**

בהצבה פשוטה, נקבל $f'(-10,000)=-1.1\cdot10^{-3}\rightarrow0^-$.

כאשר $x\rightarrow0^-$ **, מתקבל ש-** $\ell n(-x)+2$ **שואף ל-** $-\infty$ **והמכנה שואף ל-** 0^-,

ולכן $f'(x)\rightarrow+\infty$ **והישר** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית, שמגיעים אליה בעלייה.**

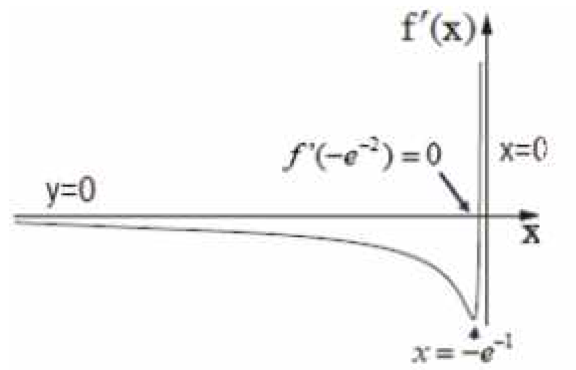
בהצבה פשוטה, נקבל $f'(-0.0001)=72,103\rightarrow+\infty$.

תשובה: כאשר $x\rightarrow-\infty$ **,** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית,** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית .**

(2) נסרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת.

נשים לב לתחום ההגדרה, שתי האסימפטוטות, סימני הנגזרת, ל- $f'(-e^{-2})=0$ **,**

ולתחומי עלייה וירידה שלה (הדומים בהתאמה לתחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה של $f(x)$ **.**



תשובה: הסרטוט מעל .

ג. נתון כי $f(-e^{-2})=0$ **, וכידוע** $f'(x)=\frac{\ell n(-x)+2}{x}$ **.**

(1) נמצא ביטוי אלגברי לפונקציה $f(x)$ **.**

נעשה אינטגרל, על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית, ונשים לב ש: $(\ell n(-x)+2)'=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$

$$f(x)=\int \frac{\ell n(-x)+2}{x}dx$$

$$f(x)=\int (\ell n(-x)+2)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$f(x)=\frac{(\ell n(-x)+2)^2}{2}+c$$

$$0=\frac{(\ell n(-(-e^{-2}))+2)^2}{2}+c \quad \leftarrow \quad f(-e^{-2})=0$$

$$0=\frac{(-2\ell n\,e+2)^2}{2}+c$$

$$c=0$$

$$\boxed{f(x)=\frac{(\ell n(-x)+2)^2}{2}}$$

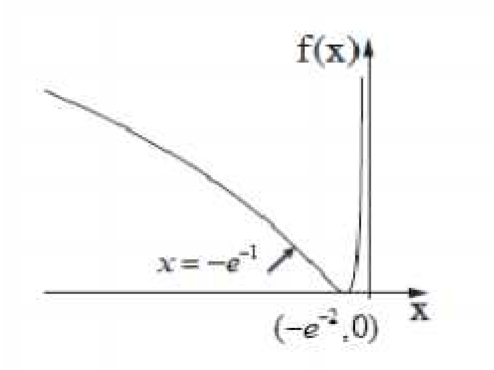
תשובה: $f(x)=\frac{(\ell n(-x)+2)^2}{2}$ **.**

(2) נסרטט סקיצה של גרף $f(x)=\frac{(\ell n(-x)+2)^2}{2}$ **.**

נשים לב לתחום ההגדרה, אי השליליות של הפונקציה, תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה,

נקודת המינימום ב- $(-e^{-2},0)$ **(בה הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות),**

ולתחומי עלייה וירידה שלה (הדומים בהתאמה סימני הנגזרת $f'(x)$ **).**



תשובה: הסרטוט מעל .