**א. נתונה סדרה $a_n$ המקיימת את הכלל: $a_{n+1}=a_n+3$ , $a_1=0$.**

**לכן, על פי כלל הנסיגה, הסדרה $a_n$ חשבונית, והפרשה הוא $d=3$ .**

**(1) הסדרה $b_n$ מוגדרת על ידי הכלל: $b_n=a_n+a_{n+1}$.**

$$b_n=a_n+a_{n+1}$$
$$b_n=a_n+a_n+3$$
$$\boxed{b_n=2a_n+3}$$

**תשובה: הוכחנו.**

**(2) נראה שהסדרה $b_n$ היא סדרה חשבונית.**

$$b_{n+1}-b_n=2a_{n+1}+3-(2a_n+3)$$
$$b_{n+1}-b_n=2(a_n+3)+3-2a_n-3$$
$$b_{n+1}-b_n=2a_n+6-2a_n$$
$$\boxed{b_{n+1}-b_n=6}$$

**הסדרה חשבונית כי ההפרש בין כל איבר לזה שקודם לו (עבור $n\ge 2$)**
**הוא קבוע (אינו תלוי ב- $n$), ולכן: $d=6$ .**

$$b_1=2a_1+3$$
$$b_1=2\cdot 0+3$$
$$\boxed{b_1=3}$$

**תשובה: הוכַח, הפרש הסדרה $b_n$ הוא $6$, $b_1=3$.**

**ב. (1) נתון $b_1+b_m=120$ .**

$$b_1+b_1+d_b(m-1)=120$$
$$6+6(m-1)=120 \quad /:6$$
$$1+m-1=20$$
$$\boxed{m=20}$$

**תשובה: $m=20$ .**

**(2) נחשב את הסכום המבוקש, עבור $m=20$, כלומר את $m_{21}+m_{22}+...+m_{40}$ ( $20$ מחוברים).**

$$b_{21}=b_1+20d=3+20\cdot 6=123$$

$$S_{21-40}=\frac{20\left[2\cdot 123+6(20-1)\right]}{2}$$
$$S_{21-40}=10\cdot 360$$
$$\boxed{S_{21-40}=3600}$$

**תשובה: הסכום הוא $3600$.**

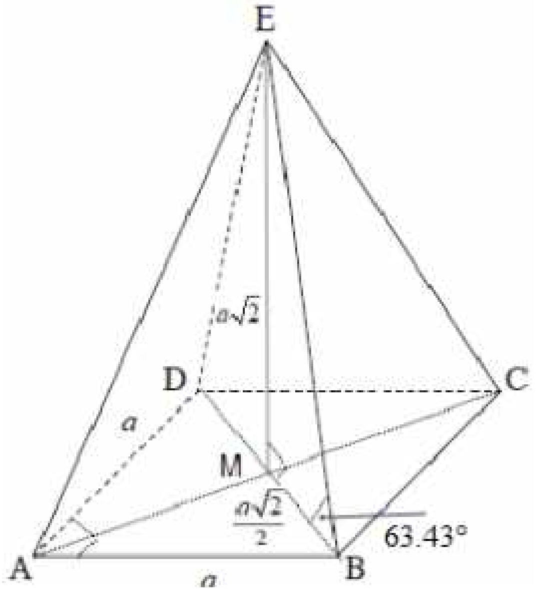
**א. בסיס הפירמידה הישרה** EABCD **הוא ריבוע שזוויותיו שוות ל-** $90°$.

**הגובה, בפירמידה ישרה, יורד למרכז המעגל החוסם, שהוא מפגש אנכים אמצעיים,**

**ובמקרה זה, של הריבוע, למפגש האלכסונים.**

**הזווית שבין מקצוע צדדי ובין בסיס הפירמידה, היא למשל** $\sphericalangle SBM$ **.**

$\Delta ABD$ **על פי משפט פיתגורס:**




$$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$$

$$(BD)^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\boxed{BD = a\sqrt{2}}$$

$$\boxed{BM = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

$\underline{\Delta EMB}$ **:**

$$\tan \sphericalangle EBM = \frac{EM}{BM} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = 2$$

$$\boxed{\sphericalangle EBM = 63.43°}$$

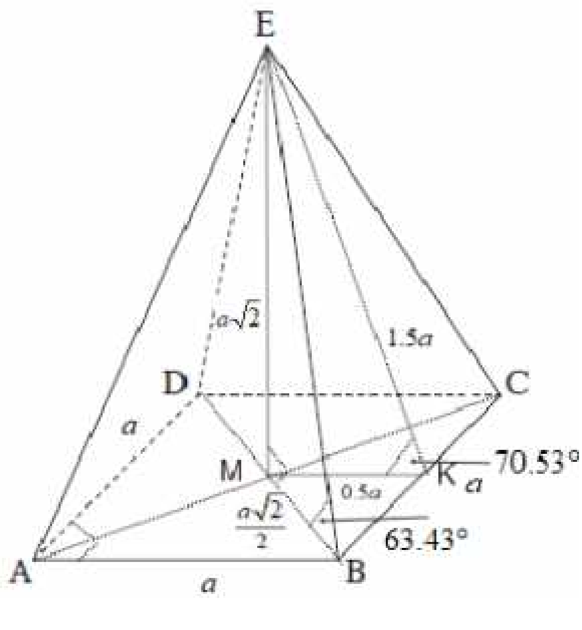
**תשובה: הזווית שבין מקצוע צדדי לבין בסיס הפירמידה היא בת** $63.43°$ **.**

**ב.** EK **הוא גובה בפאה** EBC **, שהיא שוות שוקיים, ולכן גם תיכון לבסיסה** BC **.**

MK **קטע אמצעים ב-** $\Delta ABC$ **, ולכן** $MK = 0.5a$ **.**

**הזווית שבין** EK **ובין בסיס הפירמידה, היא למשל** $\sphericalangle EKM$ **.**

$\underline{\Delta EMK}$ **:**




$$\tan \sphericalangle EKM = \frac{EM}{MK} = \frac{a\sqrt{2}}{0.5a} = 2\sqrt{2}$$

$$\boxed{\sphericalangle EKM = 70.53°}$$

**תשובה: הזווית שבין** EK **ובין בסיס הפירמידה היא בת** $70.53°$ **.**

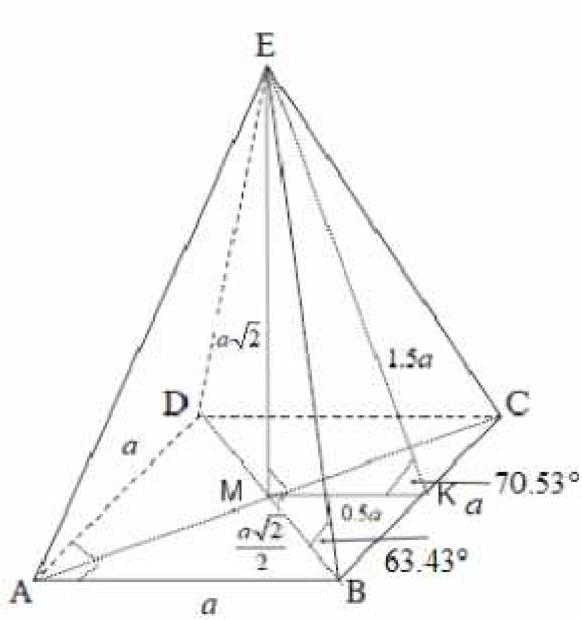
**ג. נתון כי שטח המעטפת של הפירמידה הוא** 36.75 **סמ"ר.**

**בסיס הפירמידה ריבוע, ולכן הפאות חופפות, ושטח כל אחת הוא** 9.1875 **סמ"ר** $= \frac{36.75}{4}$ **.**

$$(\text{EK})^2 = (\text{EM})^2 + (\text{MK})^2$$
$$(\text{EK})^2 = (a\sqrt{2})^2 + (0.5a)^2 = 2.25a^2$$
$$\boxed{\text{EK} = 1.5a}$$

$$S_{\Delta\text{EBC}} = \frac{\text{BC}\cdot\text{EK}}{2}$$
$$9.1875 = \frac{a\cdot 1.5a}{2}$$
$$12.25 = a^2$$
$$\boxed{a = 3.5cm}$$

**תשובה:** $a =$ 3.5 **ס"מ .**



**א. נתונה פונקציית הנגזרת** $f'(x)=2\sin 2x$ **של** $f(x)$ , **והתחום** $0\le x\le \pi$ **.**

$$0=2\sin 2x$$
$$\sin 2x=0=\sin 0$$
$$2x=2\pi k \qquad 2x=\pi+2\pi k$$
$$x=\pi k \qquad x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$
$$x=0,\pi \qquad x=\frac{\pi}{2}$$

**נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, וסוג הקיצון, בעזרת סימני הנגזרת:**

$$f'(\frac{\pi}{4})=2\sin(2\cdot\frac{\pi}{4})=2>0 \quad , \quad f'(\frac{3\pi}{4})=2\sin(2\cdot\frac{3\pi}{4})=-2<0$$

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | | - | |
| **מסקנה** | Min | ↗ | Max | ↘ | Min |

**תשובה:** $x=\pi$ **מינימום ,** $x=\frac{\pi}{2}$ **מקסימום ,** $x=0$ **מינימום.**

**ב. נמצא את** $f(x)$ , **על ידי אינטגרל לפונקציית הנגזרת, והנקודה** $(0,-2)$ **.**

$$f(x)=\int 2\sin 2x\,dx$$
$$f(x)=\frac{-2\cos 2x}{2}+c$$
$$-2=-\cos(2\cdot 0)+c$$
$$-1=c$$
$$\boxed{f(x)=-\cos 2x-1}$$

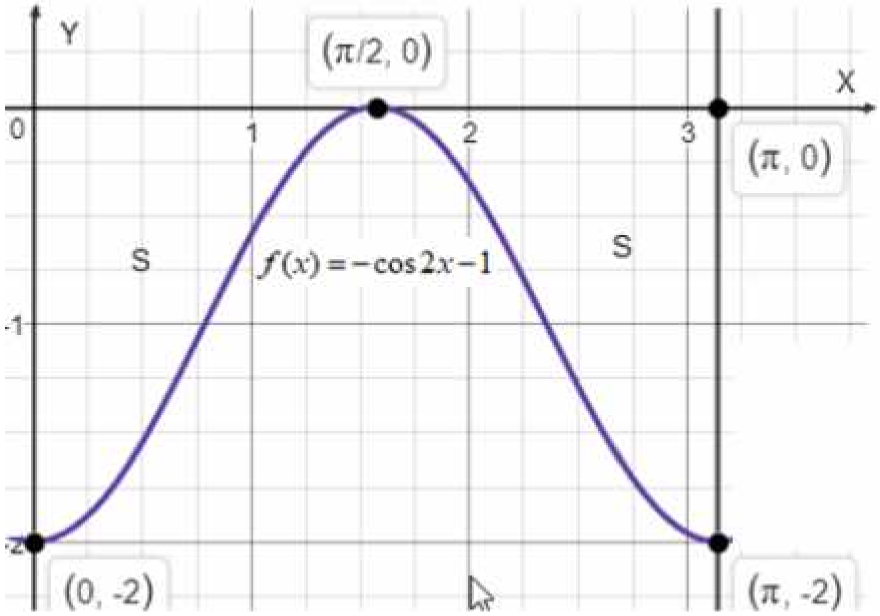
**תשובה:** $f(x)=-\cos 2x-1$ **.**

**ג. בנקודת חיתוך עם ציר ה-** $x$ **מתקיים** $y=0$ **:**

$$0=-\cos 2x-1$$
$$\cos 2x=-1=\cos\pi$$
$$2x=\pi+2\pi k$$
$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$
$$k=0 \qquad x=\frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \boxed{(\frac{\pi}{2},0)}$$

**תשובה:** $(\frac{\pi}{2},0)$**.**

**ד. הסקיצה המתאימה (כולל סימון השטח, עבור סעיף ה):**




**ה. נחשב את השטח, המסומן ב- S,**

**כאשר בשני חלקיו, הפונקציה העליונה היא** $y=0$ **, והפונקציה התחתונה היא** $f(x)=-\cos 2x-1$ **.**

$$S=\int_0^{®}(0-(-\cos 2x-1))\,dx$$

$$S=\int_0^{®}(\cos 2x+1))\,dx$$

$$S=(\frac{\sin 2x}{2}+x)\Big]_0^{®}$$

$$x=®:\quad \frac{\sin 2®}{2}+®=®$$

$$x=0:\quad \frac{\sin 2\cdot 0}{2}+0=0$$

$$S=®-0$$

$$\boxed{S=®}$$

**תשובה: גודל השטח ® יח"ר.**

**א. נתונה הפונקציה** $f(x)=ae^{x}-9e^{-x}$ **(** $a$ **הוא פרמטר).**

**תשובה: תחום ההגדרה הוא כל** $x$ **.**

**ב. שיפוע המשיק לגרף של** $f(x)=ae^{x}-9e^{-x}$ **, בנקודה שבה** $x=\ell n\,3$ **הוא** $6$**, כלומר** $f'(\ell n\,3)=6$ **.**

$$f'(x)=ae^{x}+9\cdot e^{-x}$$

$$6=ae^{\ell n 3}+9\cdot e^{-\ell n 3}$$

$$6=a\cdot 3+9\cdot\frac{1}{3}$$

$$3=3a$$

$$\boxed{a=1}$$

**תשובה:** $a=1$**.**

**ג. נציב** $a=1$**, ונקבל** $f(x)=e^{x}-9e^{-x}$ **.**

**(1) בנקודת חיתוך עם ציר ה-** $y$ **מתקיים** $x=0$ **:** $f(0)=e^{0}-9e^{-0}=-8= \quad \rightarrow \boxed{(0,-8)}$ **.**

**בנקודת חיתוך עם ציר ה-** $x$ **מתקיים** $y=0$ **.**

$$e^{x}-9e^{-x}=0$$

$$e^{x}=9e^{-x}$$

$$e^{x}=\frac{9}{e^{x}}$$

$$(e^{x})^{2}=9$$

$$e^{x}=3 \quad \rightarrow \boxed{(\ell n\,3,\,0)}$$

$$\cancel{e^{x}=-3} \quad \leftarrow e^{x}>0$$

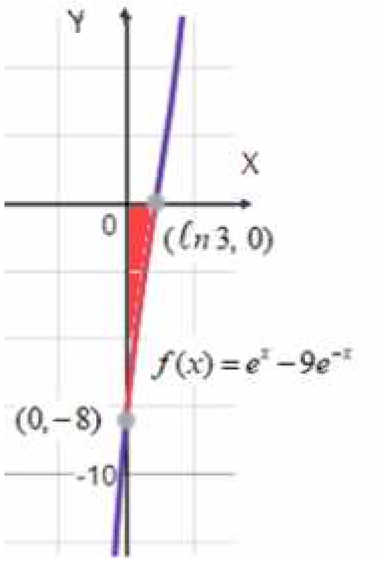
**תשובה:** $(0,-8)$ **,** $(\ell n\,3,\,0)$ **.**

**(2) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה** $f(x)$ **.**

$f'(x)=e^{x}+9e^{-x}>0$ **.**

**תשובה: עלייה כל** $x$**, ירידה אף** $x$**.**

**(3) הסקיצה המתאימה של $f(x)$ , כולל סימון השטח עבור סעיף ד:**




**ד. נחשב את השטח, הצבוע באדום.**

$$S=\int_0^{\ell n3}(0-(e^x-9e^{-x}))\,dx$$

$$S=\int_0^{\ell n3}(-e^x+9e^{-x})\,dx$$

$$S=(-e^x-9e^{-x})\Big]_0^{\ell n3}$$

$$x=\ell n3:\quad -e^{\ell n3}-9e^{-\ell n3}=-6$$

$$x=0:\quad -e^0-9e^{-0}=-10$$

$$S=-6-(-10)$$

$$\boxed{S=4}$$

**תשובה: גודל השטח 4 יח"ר.**

**א. נתונה הפונקציה** $f(x)=\dfrac{2x}{\ell n\,(x)-2}$ **.**

**בתחום ההגדרה, הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית גדול מאפס, לכן** $x>0$ **.**

**בתחום ההגדרה, המכנה שונה מאפס, לכן** $\ell n\,(x)-2\neq 0 \quad \rightarrow \ell n\,(x)\neq 2 \quad \rightarrow x\neq e^2$ **.**

**תשובה:** $x>0\,,\,x\neq e^2$ **.**

**ב. (1)** $x=0$ **לא בתחום ההגדרה, ולכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה-** $y$ **.**

**בנקודת חיתוך עם ציר ה-** $x$ **מתקיים** $y=0$ **:**

$$0=\frac{2x}{\ell n\,(x)-2}$$

$$0=2x$$

$$x=0 \text{ (crossed out)}$$

**תשובה: גרף הפונקציה** $f(x)$ **אינו חותך את הצירים.**

**(2)** $x=e^2$ **מאפס מכנה ולא מונה, לכן הישר** $x=e^2$ **מהווה אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה.**

**שתי הצבות זריזות במחשבון ומסקנות.**

$$f(0.001)=-2\cdot 10^{-4}\rightarrow -0,\quad f(1000)=407\rightarrow +\infty$$

**ניתן להציב מספרים קרובים יותר לאפס ולמספרים הגדולים, ולהבין את המשמעות.**

**כלומר, כאשר** $x=0$ **יש בגרף נקודה ריקה** $(0,0)$**, והישר** $x=0$ **אינו אסימפטוטה אנכית.**

**מימין אין אסימפטוטה אופקית, כאשר הגרף יסתיים בעלייה.**

**תשובה:** $x=e^2$ **.**

**(3) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה.**

$$f(x)=\frac{2x}{\ell n\,(x)-2}$$

$$f'(x)=\frac{2(\ell n\,(x)-2)-\frac{2x}{x}}{(\ell n\,(x)-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2\ell n\,(x)-4-2}{(\ell n\,(x)-2)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2\ell n\,(x)-6}{(\ell n\,(x)-2)^2}}$$

$$0=2\ell n\,(x)-6$$

$$2\ell n\,(x)=6$$

$$\ell n\,(x)=3$$

$$x=e^3 \quad \rightarrow y=\frac{2e^3}{\ell n\,(e^3)-2}=2e^3 \quad \rightarrow \boxed{(e^3,\,2e^3)}$$

הנגזרת חיובית, בתחום ההגדרה.

נבנה טבלה לזיהוי תחומי עלייה וירידה, וסוג הקיצון, בעזרת סימני הנגזרת:

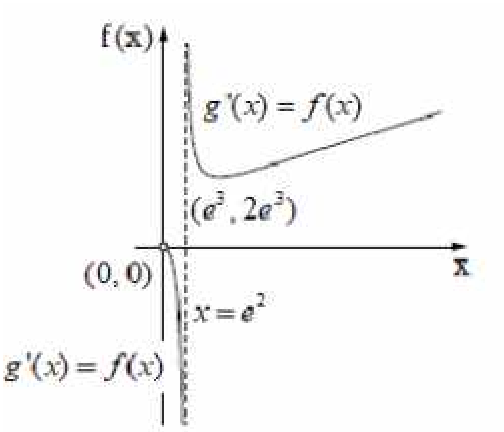
$$f'(e^4)=\frac{2\ell n(e^4)-6}{+}>0 \quad , \quad f'(3)=\frac{2\ell n(3)-6}{+}<0 \quad , \quad f'(e)=\frac{2\ell n(e)-6}{+}<0$$

| $x$ | 0 | | $e^2$ | | $e^3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | | - | | + |
| מסקנה | | ↘ | | ↘ | Min | ↗ |

**תשובה:** $(e^3, 2e^3)$ **מינימום .**

**(4) תשובה: עלייה** $x \geq e^3$ **, ירידה** $e^2 < x \leq e^3$ **, או** $0 < x < e^2$**.**

**(5)** $f(0.1) = -0.046$ **, ובהתאם הסקיצה המתאימה של** $f(x)=\dfrac{2x}{\ell n(x)-2}$ **, כולל סימון עבור סעיף ג.**




**ג. נתונה פונקציה** $g(x)$ **, המקיימת** $g'(x) = f(x)$ **.**

$g(x)$ **עולה, כאשר הנגזרת שלה** $g'(x) > 0$ **, ועל פי הסקיצה – בתחום החיוביות של** $f(x)$ **, שהוא** $x > e^2$ **.**

**תשובה: תחום העלייה של הפונקציה** $g(x)$ **הוא** $x > e^2$**.**