א. נסמן ב- t את הזמן (שניות) שיוסי רץ, מרגע ירידתו מהאוטובוס ועד לרגע שהשיג את אימו.
נסמן ב- x את מהירות האם (ק"מ לשנייה), ובהתאם $2x$ מהירות יוסי, ו- $14x$ מהירות האוטובוס.
נכניס את הנתונים לטבלה מתאימה:

	זמן - t שניות	מהירות - v ק"מ לשנייה	דרך-מרחק - s ק"מ
אוטובוס (כאשר יוסי עליו)	10	$14x$	$140x$
יוסי בריצה	t	$2x$	$2xt$
אמא (מרגע שיוסי הבחין בה)	$t+10$	x	$x(t+10)$

המרחק שיוסי רץ שווה למרחק שהאוטובוס עבר עם יוסי בכיוון אחד ועוד המרחק שהאם עברה בכיוון השני.

$$2xt = 140x + x(t+10) \quad / : x > 0$$
$$2t = 140 + t + 10$$
$$\boxed{t = 150}$$

תשובה: יוסי רץ 150 שניות (שתי דקות וחצי) כדי להשיג את אימו.

ב. יוסי הלך עם אימו, בקצב שלה, 3 דקות, כלומר 180 שניות, כאשר הם מתרחקים מהתחנה בה ירד.
לכן אורך הדרך שעליו לעבור לתחנה, בחזרה, היא המרחק שהלך עם אימו ועוד המרחק שרץ ע"מ להשיגה, מרחק של $180x + 2x\cdot 150 = 480x$.
המהירות שבה עבר יוסי מרחק זה, מהירות הריצה, היא $2x$,
ובהתאם זמן הריצה בחזרה הוא $\frac{480x}{2x} = 240$.
תשובה: יוסי רץ בחזרה לתחנת האוטובוס 240 שניות (ארבע דקות).

א. נתונה סדרה הנדסית המקיימת $b_{n+1}=\frac{1}{2^n\cdot b_n}$.

נראה שאיברי הסדרה במקומות האי-זוגיים (וגם אלו שבמקומות הזוגיים) מהווים סדרה הנדסית.

$$b_{n+1}=\frac{1}{2^n\cdot b_n}$$

$$b_{n+2}=\frac{1}{2^{n+1}\cdot b_{n+!}}$$

$$b_{n+2}=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n\cdot b_n}{1}$$

$$b_{n+2}=\frac{b_n}{2}$$

$$\boxed{\frac{b_{n+2}}{b_n}=\frac{1}{2}}$$

המנה בין כל שני איברים עוקבים, בשתי הסדרות (דילוג איבר במקורית) קבועה, לא תלויה ב- n.

לכן, שתי הסדרות הן הנדסיות, ומנת כל אחת מהן $q=0.5$.

תשובה: הוכַח.

ב. סכום 8 **האיברים הראשונים בסדרה** b_n **שווה ל-** $3\frac{7}{16}$.

נבטא את b_2 **באמצעות** b_1 **על פי הכלל הנתון:** $b_2=\frac{1}{2^1\cdot b_1} \quad \rightarrow b_2=\frac{1}{2b_1}$,

ונחשב את סכום שמונת האיברים הראשונים,

באמצעות סכום ארבעת האיברים הראשונים בשתי הסדרות ההנדסיות.

$$3\frac{7}{16}=\frac{b_1(0.5^4-1)}{0.5-1}+\frac{b_2(0.5^4-1)}{0.5-1}$$

$$3\frac{7}{16}=\frac{(0.5^4-1)}{0.5-1}(b_1+\frac{1}{2b_1})$$

$$\frac{11}{6}=b_1+\frac{1}{2b_1}$$

$$6(b_1)^2-11b_1+3=0$$

$$\boxed{b_1=1.5} \quad \boxed{b_1=\frac{1}{3}}$$

תשובה: $b_1=1.5$ **או** $b_1=\frac{1}{3}$.

א. (1) נסמן ב- p את ההסתברות שסטודנט שנבחר באקראי מביא אוכל מהבית.

זו התפלגות בינומית, כאשר נתון כי $n=4$, $p=p$, $k=2$ או $k=1$.

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי את ערכו של p :

$$P_4(2)=6\cdot P_4(1)$$

$$\binom{4}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^{4-2}=6\cdot\binom{4}{1}\cdot p^1\cdot(1-p)^3$$

$$6p^2\cdot(1-p)^2=6\cdot4\cdot p\cdot(1-p)^3 \quad /:6p(1-p)^2>0$$

$$p=4(1-p)$$

$$\boxed{p=0.8}$$

תשובה: 80% מהסטודנטים מביאים אוכל מהבית.

(2) ההסתברות שלפחות אחד מתוך שמונה סטודנטים, או כל השמונה, מביאים אוכל מהבית,

היא המאורע המשלים למאורע "אף אחד (0.2^8), או כל השמונה (0.8^8), מביאים אוכל מהבית"

$$P=1-0.8^8-0.2^8$$

$$\boxed{P=0.8322}$$

תשובה: ההסתברות היא 0.8322.

ג. (1) נגדיר את המאורעות הבאים:

A **- מביאים אוכל מהבית** $\overline{A}$ **- לא מביאים אוכל מהבית**

B **- אוכלים בקפיטריה** $\overline{B}$ **- לא אוכלים בקפיטריה**

<u>נתונים ומשמעויות מיידיות</u>

כל הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית, אוכלים אותו ולא אוכלים בקפיטריה, לכן $P(A \cap B) = 0$ **.**

כיוון שעל פי סעיף א: $P(A) = 0.8$ **- אז** $P(A \cap \overline{B}) = 0.8$ **וכמובן** $P(\overline{A}) = 0.2$ **.**

בנוסף : $P(B / \overline{A}) = 0.4 \rightarrow P(\overline{B} / \overline{A}) = 0.6$

<u>פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית</u>

$$P(\overline{B} / \overline{A}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$$

$$0.6 = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{0.2}$$

$$P(\overline{B} \cap \overline{A}) = 0.12$$

נציב בטבלה ונשלים נתונים.

	A **- מביאים אוכל מהבית**	$\overline{A}$ **- לא מביאים אוכל מהבית**	
B **- אוכלים בקפיטריה**	0	0.08	0.08
$\overline{B}$ **- לא אוכלים בקפיטריה**	0.8	0.12	0.92
	0.8	0.2	1

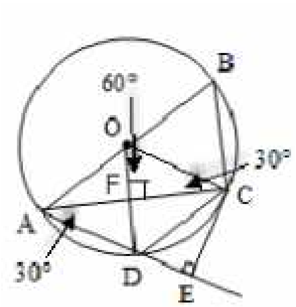
תשובה: 8% **מהסטודנטים אוכלים בקפיטריה.**

(2) הסטודנטים שאוכלים במשך היום,

הם אלו שהביאו אוכל מהבית (80% **) או אלו שאוכלים בקפיטריה (** 8% **).**

לכן ההסתברות למצוא מביניהם, סטודנט שמביא אוכל מהבית, היא $\frac{10}{11} = \frac{0.8}{0.8 + 0.08}$ **.**

תשובה: ההסתברות היא $\frac{10}{11}$ **.**



נתונים

1. ABCD **חסום במעגל 2.** AB **קוטר 3.** $CE \perp AE$.

עבור ב: 4. $OD \perp AC$ **. 5.** $\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4}$

צ"ל: א. $\Delta CDE \sim \Delta ABC$ **ב.** $OC \parallel AD$ **ג.** CE **משיק למעגל**

הסבר		טענה	נימוק
1	6	ABCD **חסום במעגל**	**נתון**
6	7	$\sphericalangle B + \sphericalangle ADC = 180°$	**סכום זוויות נגדיות במעגל הוא** 180°
	8	$\sphericalangle CDE + \sphericalangle ADC = 180°$	**סכום זוויות צמודות הוא** 180°
7, 8	9	$\sphericalangle CDE = \sphericalangle B$ **(ז)**	**חישוב**
3	10	$\sphericalangle E = 90°$	**נתון**
2	11	AB **קוטר**	**נתון**
11	12	$\sphericalangle BCA = 90°$	**זווית היקפית הנשענת על הקוטר היא ישרה**
10, 12	13	$\sphericalangle E = \sphericalangle BCA$ **(ז)**	**כלל המעבר**
9, 13	14	$\Delta CDE \sim \Delta ABC$	**משפט דמיון זווית זווית**
מ.ש.ל. א			
5	15	$\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4}$	**נתון**
14, 15	16	$\frac{CD}{AB} = \frac{CE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$	**יחס צלעות במשולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון**
10, 16	17	$\sphericalangle CAE = 30°$	**במשולש ישר זווית** ΔCAE **, הזווית שמול הניצב ששווה למחצית היתר שווה ל-** 30°
17	18	$\sphericalangle COD = 60°$	**זווית מרכזית כפולה מהזווית ההיקפית הנשענת על אותה הקשת,** $\overset{\frown}{DC}$
4	19	$OD \perp AC$	**נתון**
18, 19	20	$\sphericalangle OCA = 30°$	**סכום זוויות** 180° **ב-** ΔCFO
17, 20	21	$\sphericalangle OCA = \sphericalangle CAE$	**כלל המעבר**
21	22	$OC \parallel AD$	**אם זוויות מתחלפות שוות אז הישרים מקבילים**
מ.ש.ל. ב			
10, 22	23	$OC \perp CE$	**אם אחד משני ישרים מקבילים מאונך לישר שלישי, אז גם הישר השני מאונך לישר השלישי**
23	24	CE **משיק למעגל**	**מאונך לרדיוס בנקודה שעל המעגל**
מ.ש.ל. ג			

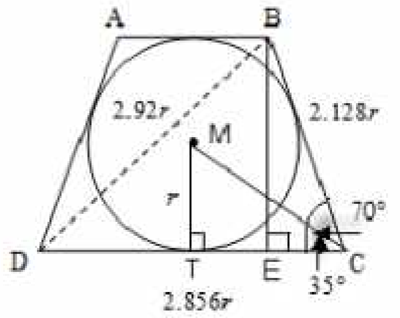
א. (1) $ABCD$ **טרפז שווה שוקיים, שרדיוס המעגל החסום בו הוא** r **.**

מרכז מעגל חסום הוא מפגש חוצי זוויות, לכן $\sphericalangle MCT=\frac{70^\circ}{2}=35^\circ$ **.**

הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה, ולכן ΔMTC **ישר זווית.**

כיוון שהטרפז שווה שוקיים אז גם $\sphericalangle MDT=\frac{70^\circ}{2}=35^\circ$ **ו-** ΔDMC **שווה שוקיים.**

לכן, הרדיוס הוא גם תיכון לבסיס המשולש ו- $BC=2TC$ **.**



$\underline{\Delta MTC}$

$\tan 35^\circ=\frac{MT}{TC}$

$TC=\frac{r}{\tan 35^\circ}$

$\boxed{TC=1.428r}$

$\boxed{DC=2.856r}$

תשובה: הבסיס הגדול של הטרפז הוא $2.856r$ **.**

(2) נוריד גובה BE **לבסיס הגדול של הטרפז, כאשר אורכו הוא** $2r$ **(מרחקים שווים בין ישרים מקבילים).**

$\underline{\Delta BEC}$

$\sin 70^\circ=\frac{BE}{BC}$

$BC=\frac{2r}{\sin 70^\circ}$

$\boxed{BC=2.128r}$

תשובה: שוק הטרפז היא $2.128r$ **.**

(3) $\underline{\Delta BCD}$ **לפי משפט הקוסינוסים**

$$(BD)^2=(BC)^2+(CD)^2-2BC\cdot CD\cdot\cos\sphericalangle C$$
$$(BD)^2=(2.128r)^2+(2.856r)^2-2\cdot 2.128r\cdot 2.856r\cdot\cos 70^\circ$$
$$(BD)^2=4.528r^2+8.157r^2-4.157r^2$$
$$(BD)^2=8.528r^2$$
$$\boxed{BD=2.92r}\quad\leftarrow BD>0$$

תשובה: אלכסון הטרפז הוא $2.92r$ **.**

ב. המעגל החוסם את הטרפז $ABCD$ **חוסם גם את** ΔDBC **.**

$\underline{\Delta DBC}$ **לפי משפט הסינוסים**

$$2R=\frac{BD}{\sin 70^\circ}\quad\rightarrow R=\frac{2.92r}{2\sin 70^\circ}\quad\rightarrow\boxed{R=1.554r}$$

והיחס המבוקש: $\frac{r}{R}=\frac{r}{1.554r}=0.6435$ **.**

תשובה: היחס בין רדיוס המעגל החסום בטרפז ובין רדיוס המעגל החוסם את הטרפז הוא 0.6435 **.**

א. נתונה הפונקציה: $\boxed{f(x)=\frac{1}{\sin x\cos x}}$ **והתחום** $-\frac{®}{2}\le x\le\frac{®}{2}$ **.**

(1) נמצא את תחום ההגדרה

$$f(x)=\frac{2}{\sin 2x}$$
$$\sin 2x\ne 0$$
$$2x\ne ®k$$
$$x\ne\frac{®}{2}k$$

תשובה: $-\frac{®}{2}<x<\frac{®}{2},\ x\ne 0$ **.**

(בהתאם, לגרף הפונקציה שלוש אסימפטוטות אנכיות: $x=\frac{®}{2},\quad x=0,\quad x=-\frac{®}{2}$ **)**

(2) נמצא האם הפונקציה זוגית או אי-זוגית (או לא זוגית ולא לא-זוגית).

$$f(-x)=\frac{2}{\sin 2(-x)}$$
$$f(-x)=\frac{2}{-\sin 2x}$$
$$\boxed{f(-x)=-f(x)}$$

תשובה: הפונקציה אי-זוגית (משמעות - סימטרית לראשית הצירים).

(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה (אין נקודות קצה):

$$\boxed{f'(x)=\frac{-4\cos 2x}{(\sin 2x)^2}}$$
$$\cos 2x=0$$
$$2x=\frac{®}{2}+®k$$
$$x=\frac{®}{4}+\frac{®}{2}k$$
$$f(\frac{®}{4})=\frac{2}{\sin(2\cdot\frac{®}{4})}=2\quad\rightarrow\boxed{(\frac{®}{4},2)}$$

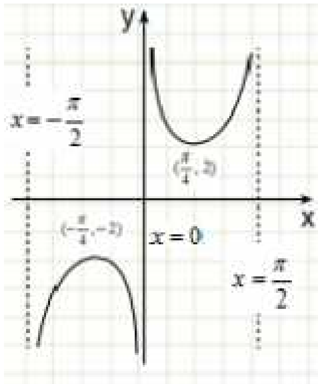
כיוון שאין נקודות חיתוך עם ציר ה- x **(מונה הפונקציה חיובי),**

והנקודה החשודה כקיצון היא ברביע הראשון בין שתי אסימפטוטות אנכיות – הרי שהיא נקודת מינימום.

הפונקציה אי-זוגית – ולכן $(-\frac{®}{4},-2)$ **מקסימום.**

תשובה: $(\frac{®}{4},2)$ **מינימום,** $(-\frac{®}{4},-2)$ **מקסימום.**

(4) סרטוט של גרף הפונקציה $f(x)$ **.**



ב. (1) נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)-a$ **,**

שהיא הזזה אנכית כלפי מטה עבור $a>0$ **של** $f(x)$ **, או כלפי מעלה עבור** $a<0$ **.**

תחומי העלייה והירידה שלה זהים לתחומי העלייה/ ירידה של $f(x)$ **(** $g'(x)=f'(x)$ **).**

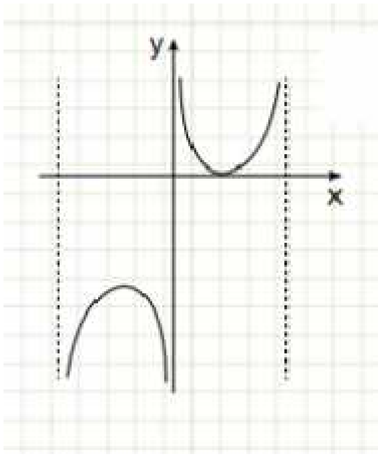
עבור $a=2$ **לפונקציה** $g(x)=f(x)-2$ **תהייה השקה לציר ה-** x **בנקודה** $(\frac{®}{4},0)$ **.**

עבור $a=-2$ **לפונקציה** $g(x)=f(x)+2$ **תהייה השקה לציר ה-** x **בנקודה** $(-\frac{®}{4},0)$ **.**

תשובה: למשוואה $f(x)-a=0$ **יש פתרון אחד בלבד עבור** $a=2$ **, או** $a=-2$ **.**

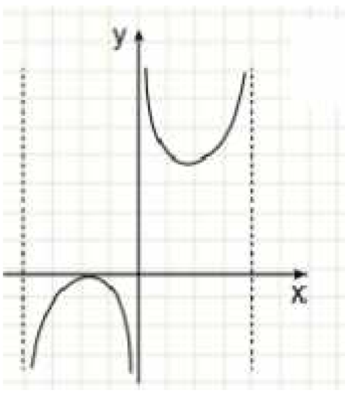
(2) עבור $a=2$ **נקודות הקיצון של** $g(x)$ **הן:**

$(\frac{®}{4},0)$ **מינימום,** $(-\frac{®}{4},-4)$ **מקסימום.**



עבור $a=-2$ **נקודות הקיצון של** $g(x)$ **הן:**

$(\frac{®}{4},4)$ **מינימום,** $(-\frac{®}{4},0)$ **מקסימום.**



א. נתונה פונקציית הנגזרת $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

הישר $y=\frac{1}{3}x+3$ **חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה** $x=0$ **, ולכן** $f(0)=3$ **.**

נמצא את הפונקציה הקדומה, את $f(x)$ **, על ידי זיהוי הנגזרת הפנימית (של הביטוי בתוך השורש).**

$$f(x)=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

$$f(x)=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+9}}\cdot 2x\,dx$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+9}+c$$

$$3=\sqrt{0+9}+c\quad\rightarrow c=0$$

$$\boxed{f(x)=\sqrt{x^2+9}}$$

תשובה: $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ **.**

ב. (1) הביטוי x^2+9 **חיובי לכל** x **.**

תשובה: תחום ההגדרה של $f'(x)$ **ושל** $f(x)$ **הוא כל** x **.**

(2) סימן ערכי פונקציית הנגזרת נקבע בהתאם למונה .

כאשר $x>0$ **הפונקציה חיובית, וכאשר** $x<0$ **הפונקציה שלילית.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|}=\pm1$$

תשובה: ל- $f'(x)$ **יש שתי אסימפטוטות אופקיות:** $y=1,\quad y=-1$ **.**

(3) קל לראות שהפונקציה עוברת בראשית הצירים, וזו נקודת החיתוך היחידה שלה עם הצירים.

תשובה: $(0,0)$

(4) נמצא את תחומי העלייה והירידה של $f'(x)$ **.**

$$\boxed{f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}}$$

$$f''(x)=\frac{\sqrt{x^2+9}-\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9}$$

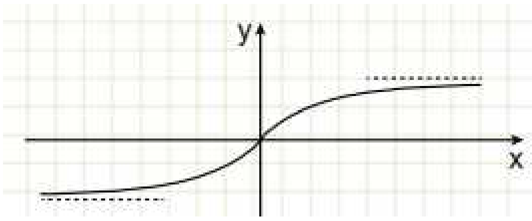
$$f''(x)=\frac{x^2+9-x^2}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}}$$

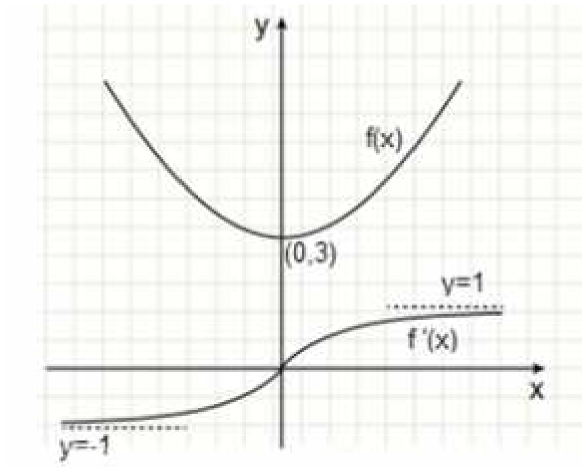
מכנה הנגזרת של $f'(x)$ **חיובי לכל** x**, מונה הנגזרת חיובי –**

תשובה: $f'(x)$ **עולה לכל** x **, יורדת לאף** x **.**

(5) הסקיצה המבוקשת של $f'(x)$ **.**



(6) תוספת של $f(x)$ **.**



ד. המשוואה $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=k$ .I **שקולה למשוואה** $f'(x)=k$ **. המשוואה** $\sqrt{x^2+9}=k$ .II **שקולה למשוואה** $f(x)=k$ **.**

עבור $k>0$ **- ניתן לראות על פי הציור המשותף בסעיף ב(6) ,**

כי לישר $y=k$ **אין נקודת חיתוך עם אף אחת מהפונקציות, בתחום** $1\le k<3$.

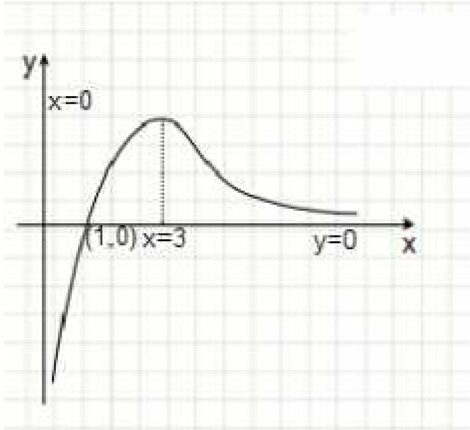
תשובה: עבור $1\le k<3$ **אין פתרון למשוואה** I **וגם אין פתרון למשוואה** II **.**

א. $f'(x)$ **, המוגדרת בתחום** $x>0$ **, חותכת את ציר ה-** x **בנקודה** $(1,0)$**.**

הנקודה, שבה $x=3$ **היא נקודת מקסימום שלה, על פי תחומי העלייה והירידה הנתונים.**

ל- $f'(x)$ **יש שתי אסימפטוטות נתונות, ציר ה-** y **וציר ה-** x **.**

סקיצה מתאימה ל- $f'(x)$ **היא:**



ב. על פי תחומי החיוביות והשליליות של $f'(x)$ **: חיובית עבור** $x>1$ **ושלילית עבור** $0<x<1$ **,**

ניתן לקבוע את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$ **: עולה עבור** $x>1$ **ויורדת עבור** $0<x<1$**.**

תשובה: $x=1$ **מינימום.**

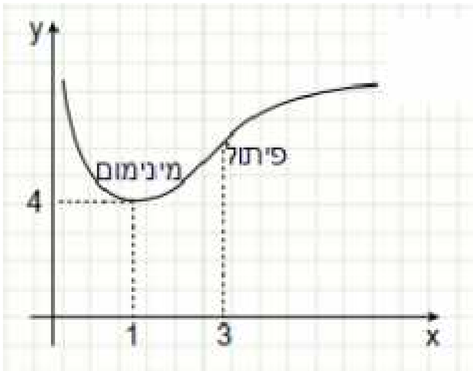
ג. על פי תחומי העלייה והירידה של $f'(x)$ **: עולה עבור** $0<x<3$ **ויורדת עבור** $x>3$ **,**

ניתן לקבוע את תחומי הקעירות של $f(x)$ **:**

תשובה: קעירות כלפי מעלה $\cup$ **עבור** $0<x<3$ **, קעירות כלפי מטה** $\cap$ **עבור** $x>3$ **.**

ד. $f(x)\geq 4$ **בתחום ההגדרה שלה** $x>0$**, לכן שיעורי נקודת המינימום הם** $(1,4)$**.**

סקיצה מתאימה ל- $f(x)$ **היא:**



ה. נתונה הפונקציה $g(x)=-\left[f(x)\right]^3$ **.**

בהתאם: $g'(x)=-3\left[f(x)\right]^2\cdot f'(x)$

על פי הסקיצה של $f(x)$ **ניתן לראות כי** $f(x)>0$ **, לכן סימני** $g'(x)$ **נגדיים לאלו של** $f(x)$ **.**

תשובה: $g(x)$ **יורדת עבור** $x>1$ **ועולה עבור** $0<x<1$**.**